Signale und Systeme
Theorie zu den Aufgaben

Johannes Bader

27. Mai 2003

1 Elementare Signale und Signaloperationen

Aufgaben 1.1 und 1.2

Die Funktion auf die Form

$$\underbrace{-}_{4}\underbrace{a}_{5}\cdot x\Big(\underbrace{-}_{1}\underbrace{\frac{1}{b}}_{2}\cdot(t-\underbrace{t_0}_{3})\Big)+\underbrace{x_0}_{6} \tag{1}$$

bringen. Danach folgende Schritte auf der Funktion $x(t)$ ausführen:

1. Falls $\ominus$ die Funktion an der y-Achse spiegeln.
2. Die Funktion um den Faktor b in x-Richtung strecken.
3. Die Funktion um t_0 nach rechts (falls $+t_0$ steht nach links) verschieben.
4. Falls $\ominus$ die Funktion an der x-Achse spiegeln.
5. Die Funktion um den Faktor a in y-Richtung strecken.
6. Die Funktion um x_0 nach oben (falls $-x_0$ steht nach unten) verschieben.

Durch multiplizieren der Funktion $f(t)$ mit der Sprungfunktion lässt sich ein Bereich auswählen. Dabei gilt für $a < b$

$\sigma(t-a)$	wählt den Bereich rechts der Grenze a	(2)
$\sigma(a-t))$	wählt den Bereich links der Grenze a	(3)
$\sigma(t-a)\cdot\sigma(b-t)$	wählt den Bereich zwischen a und b	(4)
$\sigma(t-a)-\sigma(t-b)$		
$\sigma(a-t)+\sigma(t-b)$	wählt den Bereich ausserhalb von a und b	(5)

Aufgabe 1.3

Sowohl $x(t)$ als auch $y(t)$ sind bereichsweise linear. Deshalb genügt es, nur die Knickpunkte zu berechnen und diese dann durch Geraden zu verbinden.

Aufgabe 1.4

Eine Funktion setzt sich zusammen aus einen geraden Teil $g(t)$ und einem ungeraden Teil $u(t)$.

$$f(t) = u(t) + g(t) \tag{6}$$

Dabei gilt $u(t) = -u(-t)$ und $g(t) = g(-t)$ und somit

$$\boxed{u(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \qquad g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}} \tag{7}$$

Aufgabe 1.5

Durch ersetzen von t durch $t-1$ erhält man das Signal $x(t)\sigma(-t)$, also ist der negative Teil des Signals bekannt. Nach Formel 6 erhält man den ungeraden Anteil $x_u(t)$ für $t \leq 0$. Nach Definition gilt $u(t) = -u(-t)$ woraus man $x_u(t)\ \forall\, t$ erhält.

2 Periodische Signale

Aufgabe 2.1

Eine Funktion $x(t)$ hat die Periode T wenn gilt

$$\boxed{x(t) = x(t+T)} \tag{8}$$

Die neue Periode T' muss ein Vielfaches der beiden alten sein, also

$$a \cdot T_1 = b \cdot T_2 = T' \qquad\qquad a, b \in \mathbb{N}$$

also $a/b \in \mathbb{Q}$. Diese Bedingung ist hinreichend, aber nicht notwendig. Die Periode T' ist nicht zwingend Fundamentalperiode.

Aufgabe 2.2

Das neue Signal ist auch periodisch. Für die neue Periode gilt

$$\boxed{x(t) \mapsto x(at) \Rightarrow T \mapsto \frac{T}{a}} \tag{9}$$

Beweis: $x\big(a(t + \frac{T}{a})\big) = x(at+T) = x(at)$

Aufgabe 2.3

Man versucht, den Faktor $e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$ auszuklammern. Durch Koeffizientenvergleich erhält man danach sofort die c_k. Es gilt dabei

$$x^*(t) = \Re\big(x(t)\big) - \Im\big(x(t)\big) \tag{10}$$

Insbesondere ist $e^{*jat} = e^{-jat}$

Ausgerechnet: 2.3 c)

$$\begin{aligned} x*(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\right)^* \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{-l}^* e^{jl\frac{2\pi}{T}t} \end{aligned}$$

wobei $l = -k$. Koeffizientenvergleich liefert $c_k = c_{-k}^*$

Aufgabe 2.4

a) zeigt man durch einfaches Umformen. Dabei gilt $e^{jk\pi} = \begin{cases} -1 & k = \text{ungerade} \\ 1 & k = \text{gerade} \end{cases}$

b) Nach Definition gilt $x(t) = -x(t+1)$ woraus sich die gesamte Funktion $x(t)$ bestimmen lässt. Die komplexe Schreibweise der Fourierreihe lautet:

Eine T-periodische Funktion $x(t)$ besitzt die komplexe Fourierreihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \tag{11}$$

Für die c_k gilt

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

Aufteilen des Integrals in zwei Bereiche und partielles integrieren liefert die Lösung.

Aufgabe 2.5

Die reelle Schreibweise der Fourierreihe lautet:

Eine periodische Funktion $x(t)$ mit der Periode T besitzt die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\frac{2\pi}{T}t + b_k \sin k\frac{2\pi}{T}t \tag{13}$$

wobei

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos k\frac{2\pi}{T}t\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin k\frac{2\pi}{T}t\,\mathrm{d}t \tag{15}$$

Ausserdem gilt: ist $x(t)$ gerade, so sind alle $b_n = 0$. Ist $x(t)$ ungerade, so sind alle $a_n = 0$. Zwischen der reellen und der komplexen Schreibweise besteht folgender Zusammenhang:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - jb_k) & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}) & k < 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k} \\ b_k &= j(c_k + c_{-k}) \end{aligned}$$

Nach (9) ist die Periode in dieser Aufgabe $\frac{2\pi}{\omega_0}$

3 Faltungsoperationen, LTI-Systeme

Aufgabe 3.1

Für LTI-Systeme gilt das Superpositionsprinzip, dass heisst für ein System T gilt

Superpositionsprinzip

$$T\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aT\{x_1(t)\} + bT\{x_2(t)\} \tag{16}$$

Man kann $x_2(t)$ aus Linearkombinationen von $x_1(t)$ darstellen und so, da es sich um ein LTI-System handelt, $y_2(t)$ indirekt bestimmen.

$$x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2) \Rightarrow y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$$

Aufgabe 3.2

Die Faltung zweier Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ wird mit $x_1(t) * x_2(t)$ oder kurz $(x_1 * x_2)(t)$ bezeichnet und berechnet sich wie folgt

Faltung

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{17}$$

Aufgabe 3.3

Der Impuls $\delta(t)$ ist definiert durch

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \tag{18}$$

Die Antwort des Systems auf den Impuls wird als Impulsantwort bezeichnet und mit $h(x)$ bezeichnet. Ist die Impulsantwort bekannt, lassen sich für alle Eingangssignale die Antwort berechnen durch

Impulsantwort

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * y(t) \tag{19}$$

Durch umformen des Integrals lässt sich die Impulsantwort ablesen.

Ausgerechnet: 3.3 a)

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t-2} e^{-(t-(\tau+2))} x(\tau + 2 - 2)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-2-\tau)} \sigma(t - 2 - \tau) x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \underbrace{e^{-(t-2)} \sigma(t-2)}_{h(t)} * x(t) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4

Es gelten folgende Beziehungen

$$y'(t) = (x' * h)(t) = (x * h')(t) \tag{20}$$

und

$$\sigma'(t) = \delta(t) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \sigma(t) \tag{21}$$

Ausserdem hat die δ-Funktion Siebeigenschaft, das heisst

Siebeigenschaft der Sigmafunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - a)\,\mathrm{d}t = f(a) \qquad f(t) * \delta(t - a) = f(a) \tag{22}$$

Ausserdem ist $f(t) \cdot \delta(t) = \delta(t)$. Für die Faltung gelten die meisten Regeln der Multiplikation, also auch

$$f(t) * \big(h(t) + g(t)\big) = f(t) * h(t) + f(t) * g(t)$$

Aufgabe 3.5

Im Faltungsintegral $x * z$ muss $z(t-\tau)$ der σ-Funktion gemäss (4) auf Seite 1 entsprechen.

Aufgabe 3.6

a) Das System soll nur die Nutzkomponente liefern, also $x(t)-$ das Echo. Das Echo an der Stelle t beträgt $a \cdot x(t-T_v)$.
b) Da das Echo zeitinvariant ist, darf der Fehler $\triangle T$ nicht grösser sein als T_v, ansonsten wäre ein Echo zeitlich vor dem dazu gehörigen Signal denkbar. Die (normierte) Signalenergie eines Signal $f(t)$ ist

Signalenergie

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{23}$$

Ausgerechnet: Ist der Fehler $\triangle T$ grösser als T, so wird das gesamte Echo nicht unterdrückt. Bei der Berechnung des Echos muss man auch die Echos des Echo berücksichtigen. Die Energie des ersten Echo beträgt

$$\int_0^T a^2\,\mathrm{d}t = a^2 \cdot T$$

Das zweite Echo besitzt nur noch die Höhe a^2 und somit die Energie $a^4 \cdot T$. Insgesamt ergibt sich eine Energie von $E = a^2T(1+a^2+a^4\dots) = \frac{a^2T}{1-a^2}$. Die Echounterdrückung liefert nun einen Fehler, der betragsmässig dem Echo entspricht und somit die selbe Energie wie das Echo besitzt. So ergibt sich ein Fehler

$$E = 2\frac{a^2}{1-a^2}T$$

Für $\triangle T < T$ kommt es zu der gewünschten Überlagerung von Echo und Echounterdrückung. Das Echo tritt nun nur noch für $\triangle T$ auf, weshalb die Energie nun $E = 2\frac{a^2}{1-a^2}\triangle T$

Aufgabe 3.7

Zeitinvarianz ist wie folgt definiert: Ein System T, $y(t) = T\{x(t)\}$ ist zeitinvariant, wenn das Eingangssignal $x_1(t) := x(t-t_0)$ das Ausgangsignal $y_1(t) = y(t-t_0)$ erzeugt. Um dies zu zeigen, berechnet man $y_1(t) = T\{x_1(t)\}$, (zuerst transformieren und dann verschieben) und $y(t-t_0) = T\{x(t-t_0)\}$ (zuerst verschieben, dann transformieren). Ist das System zeitinvariant, so erhält man das selbe Ergebnis.

Ein System heisst kausal, wenn bei beliebiger Wahl von t_0 das Ausgangssignal $y(t_0)$ nur von Eingangswerten $x(t)$ mit $t \leq t_0$ abhängt. Das System ist also nicht hellseherisch.

Ein System heisst BIBO-stabil, wenn jedes beschränkte Eingangssignal ein beschränktes Ausgangssignal erzeugt. Eine Signal $g(t)$ ist beschränkt, wenn es einen konstanten, positiven endlichen Wert K gibt, für den gilt

Beschränktheit

$$|g(t)| \leq K < \infty \qquad \forall\, t \tag{24}$$

Das System $y(t) = x(t-a)$ hat die Impulsantwort

Signalverzögerung

$$y(t) = x(t-a) \Rightarrow h(t) = \delta(t-a) \tag{25}$$

Die Verschiebung ist genau dann kausal, wenn $a \geq 0$. Die Impulsantwort von $\mathcal{S}_1$ erhält man wie in Aufgabe 3.3 a) beschrieben (Seite 5).
Für Zusammenschaltungen gilt:

Zusammenschaltungen

> Die Impulsantwort von nacheinander geschalteten Systemen erhält man durch Faltung der Impulsantworten. Die Impulsantwort von parallel geschalteten System durch Addition der Impulsantworten.

Aufgabe 3.8

a) Vorgehen wie in Aufgabe 1.1, 1.2.

Ausgerechnet: 3.8 b) Das System ist zeit invariant denn (nach Aufgabe 3.7)

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t_0)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau-t_0)\,\mathrm{d}\tau \\ &= y(t-t_0) \end{aligned}$$

Das System ist aber nicht kausal, da $\sigma(\frac{1}{2}(t+1))$ von $t+1$ abhängt.

Aufgabe 3.9

Wie Aufgabe 3.8, zu a) siehe (4) Seite 1

Aufgabe 3.10

a) Ein System T ist linear, falls das Superpositionsprinzip 16 gilt. $y(t_0)$ hängt von $x(t)$ mit $t > t_0$ ab, also ist das System akausal. Wie in Aufgabe 3.8 b) zeigt man, dass das System zeitvariant ist.

Ausgerechnet: Das begrenzte Signal $x(t) := 1 \leq 2\ \forall\, t$ führt zu einem unbegrenzten Ausgangssignal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 4\,\mathrm{d}\tau = \infty$$

also ist das System BiBo-instabil

b) Die Fourier Transformation eines Signal $y(t)$ wird mit $Y(j\omega)$ bezeichnet und berechnet sich wie folgt

Fouriertransformation

$$Y(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{26}$$

Man bezeichnet die beiden Bereiche wie folgt

Zeit- und Frequenzbereich

$$\begin{array}{rcl} \text{Zeitbereich} & & \text{Frequenzbereich} \\ x(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & X(j\omega) \end{array} \tag{27}$$

Ausserdem gilt das *Modulations-* oder *Fenstertheorem*

> Der Multiplikation im Zeitbereich entspricht eine Faltung im Frequenzbereich. Umgekehrt entspricht der Multiplikation im Frequenzbereich eine Faltung im Zeitbereich

Das heisst, man formt $y(t)$ durch geschicktes Umformen in ein Faltungsintegral um. Aufgabe c) ist am besten graphisch zu lösen.

Aufgabe 3.11

Aus (20) folgt, $\delta(t) = x'(t) \Rightarrow h(t) = y'(t)$

Aufgabe 3.12

Um die Impulsantwort zu erhalten, gibt es zwei Varianten a) Die erste Variante ist, $x(t) = \delta(t)$ zu setzen und daraus $y(t) = h(t)$ zu berechnen. Wir berechnen also

$$\int \delta(t) - \underbrace{\delta(t-T)}_{\substack{\text{verzögertes}\\ \text{Signal}}}\ \mathrm{d}t$$

b)

Ausgerechnet: Die zweite Variante geht über den Satz für Zusammenschaltungen Seite 6. Nach (25) ist die Impulsantwort der Signalverzögerung $h(t) = \delta(t-T)$. Auf dem zweiten Weg passiert nichts mit dem Signal, was der Impulsantwort $\delta(t)$ entspricht. Wir subtrahieren also $\delta(t-T)$ von $\delta(t)$ und falten das Ergebnis mit der Impulsantwort des Integrator, $h_i(t) = \int \delta(t) = \sigma(t)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \big(\delta(\tau) - \delta(\tau - T)\big)\sigma(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - T)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \sigma(t) - \sigma(t-T) \end{aligned}$$

Aufgabe b) löst man am schnellsten graphisch.

4 Methoden zu Berechnung der Fourier-Transformation

Aufgabe 4.1

Die Fouriertransformationen berechnen sich nach (26). Für die Fouriertransformation eines zeitdiskreten Signals gilt

Fouriertransformation eines zeitdiskreten Signals

1. Das Integral lässt sich in die Summe ziehen.
2. Häufig sind die entstehenden Summen geometrische Reihen. Für diese gilt die Formel

   geometrische Reihe

   $$\boxed{S_n = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}} \tag{28}$$

   was für $|\alpha < 1|$ für $n \to \infty$ gegen

   $$S_\infty = \frac{1}{1-\alpha} \tag{29}$$

   konvergiert. In Aufgabe d) braucht man ausserdem die Siegeigenschaft (22) der δ-Funktion

Aufgabe 4.2

Um von einer Fourier-Transformation die Originalfunktion zu erhalten berechnet man

inverse Fouriertransformation

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega} \tag{30}$$

a) Hier lässt sich der Verschiebungssatz anwenden

Verschiebung

$$\boxed{e^{j\omega_0 t}x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X\big(j(\omega-\omega_0)\big)} \tag{31}$$

und danach die Formel

$$\boxed{x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases} \circ\!\!-\!\!\bullet 2\frac{\sin \omega T_1}{\omega}} \tag{32}$$

b) Nach dem Umwandeln des cos gemäss

$$\boxed{\cos(j\omega) = \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{33}$$

lässt sich die Beziehung $\delta(t-T_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{j\omega T_0}$ anwenden. Wendet man zuerst den Verschiebungssatz an, braucht man ausserdem:

$$\boxed{f(t)\cdot\delta(t-T_0) = f(T_0)\cdot\delta(t-T_0)} \tag{34}$$

Aufgabe 4.3

FEHLEND

Aufgabe 4.4

Hier wendet man die Parsevalsche Beziehung für aperiodische Signale an;

Parseval

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega \tag{35}$$

und für $Y(jw)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega) \tag{36}$$

Aufgabe 4.5

$x_1(t)$ ist gleich $x(t)$ multipliziert mit $\sin\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$. Gemäss Box auf Seite 8 entspricht die Multiplikation einer Faltung im Frequenzbereich. Die Fouriertransformierte von $\sin\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$ ist eine δ-Funktion. Eine Faltung mit einer δ-Funktion entspricht einer Verschiebung nach (31) Seite 9. Aus $X_1(j\omega)$ lässt sich die Energie wie in Aufgabe 4.4 berechnen.

Aufgabe 4.6

Für Ableitungen gilt

Ableitungsregel

$$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\ (j\omega)^n X(j\omega) \tag{37}$$

Die Energie lässt sich dann mit (35) berechnen.

5 Anwendung der FT auf LTI-Systeme

Aufgabe 5.1

Ein Hochpassfilter hat die Übertragungsfunktion

Übertragungsfunktion des Hochpassfilters

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| > \omega_g \\ 0, & |\omega| < \omega_g \end{cases} \tag{38}$$

Das lässt sich umformen in

$$H(j\omega) = 1 - \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_g \\ 0, & |\omega| > \omega_g \end{cases}$$

a_{HP} ist $\sigma(t) * h(t)$

Aufgabe 5.2

a) Schreibt man $y(t)$ und $x(t)$ als Fourierreihen, so gilt

$$c_k^y = H\left(j\frac{2\pi k}{T}\right)c_k^x \tag{39}$$

denn

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^y e^{j\frac{2\pi k}{T}t} &&\circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^y F\left\{e^{j\frac{2\pi k}{T}t}\right\} \\ & &&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^y 2\pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \\ x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^x e^{j\frac{2\pi k}{T}t} &&\circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^x H\left(j\frac{2\pi k}{T}\right)2\pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \end{aligned}$$

b) i) $f = \frac{1}{T}$. ii) Es gilt die Formel

$$\triangle \leq \frac{\sqrt{6\varepsilon}}{\pi f_g}$$

Aufgabe 5.3

a) Aus der Beziehung

$$j\Im\{x(t)\} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left(X(j\omega) - X^*(-j\omega)\right) \tag{40}$$

folgt

$$X(j\omega) = X^*(-j\omega) \Rightarrow X(-j\omega) = X^*(j\omega)$$

Ausserdem gilt

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j\cdot\arg\{H(j\omega)\}} \tag{41}$$

und somit $H^*(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{-j\cdot\arg\{H(j\omega)\}}$
c) Für kausale Systeme gilt die Bedingung

$$h(t) = 0 \qquad \forall\, t < 0 \tag{42}$$

Aufgabe 5.4

Es folgt direkt

$$X(j\omega) = Y(j\omega) \cdot (1 + \tau_0 j\omega)$$

Was sich mit Hilfe der Ableitungsregel (37) zurück transformieren lässt.

Aufgabe 5.5

Siehe Hausaufgabe 2

Aufgabe 5.6

$|H(j\omega)|$ ist gerade und $\arg(H(j\omega)) = 1$. Damit lässt sich $h(t)$ berechnen und damit die Sprungantwort $a(t)$.

Aufgabe 5.7

Es handelt sich um einen Spannungsteiler, also ist

$$U_2(j\omega) = U_1(j\omega) \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = U_1(j\omega) \cdot \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

Aufgabe 5.8

Einfach

Aufgabe 5.9

Ausgerechnet: a)

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= A \int_{t-\triangle}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Da $h(t)$ als linear anzunehmen ist entspricht die Integralfläche einem Trapez. An der Stelle $t - \triangle$ ist $h(t-\triangle) = h(t) - \triangle\dot{h}(t)$. Also folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= A \cdot \triangle \cdot \frac{h(t) - \triangle\dot{h}(t) + h(t)}{2} \\ &= A \cdot \triangle \cdot h(t) - A\frac{\triangle^2}{2}\dot{h}(t) \end{aligned}$$

Aufgabe 5.10

Aus (20) folgt

$$\boxed{h(t) = \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}} \tag{43}$$

Der Rest lässt sich nach 5.4 berechnen.

Aufgabe 5.11

Für die Fouriertransformierte gilt

$$\mathrm{F}\left\{\sum x(k,t)\right\} = \sum \mathrm{F}\left\{x(k,t)\right\} \tag{44}$$

Das Integral lässt sich mit der Siebeigenschaft (22) einfach lösen. Für die resultierende geometrische Reihe gilt (28).

Aufgabe 5.12

a) Für den Betrag gilt

$$|H(j\omega)| = \frac{\left|1 - j\frac{\omega}{\omega_0}\right|}{\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right|}$$

Für das Argument gilt

$$\arg H(j\omega) = \arg\left(1 - j\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

b) Durch die Polynomdivision $-j\dfrac{\omega}{\omega_0} + 1 : j\dfrac{\omega}{\omega_0} + 1$ erhält man

$$H(j\omega) = -1 + 2\omega_0 \frac{1}{j\omega + \omega_0}$$

was sich mit Tabelle zurück transformieren lässt.

Aufgabe 5.13

Es gilt $\tilde{h}(t) = h(t)\sigma(t)$. Die Fouriertransformierte lässt sich nach

$$h(t) \cdot \sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi}\left(H(j\omega) * (\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) \tag{45}$$

einfach berechnen.

Aufgabe 5.14

Die Übertragungsfunktion lässt sich in einen Tiefpass- und in einen Hochpassanteil unterteilen:

$$H(j\omega) = e^{-j\frac{n\pi}{\omega_g}\omega} \cdot S(j\omega) + e^{-jn\pi}\big(1 - S(j\omega)\big)$$

wobei $S(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_g \\ 0, & |\omega| > \omega_g \end{cases}$. Das lässt sich mit

Verschiebungsgesetz

$$x(t - T_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-j\omega T_0} X(j\omega) \tag{46}$$

und $e^{-jn\pi} = (-1)^n$ zurück transformieren.

Aufgabe 5.15

a) Der Betrag und das Argument lässt sich wie in Aufgabe 5.12 berechnen.
b) Um die Impulsantwort zu bestimmen, berechnet man die inverse Fouriertransformierte von $\frac{1-j\omega T}{1+j\omega T}$ wie in Aufgabe 5.12. Die Exponentialfunktion entspricht einer Verschiebung nach (46).
Die Sprungantwort lässt sich gemäss (43) berechnen.

Aufgabe 5.16

$H(j\omega)$ lässt sich schreiben als

$$|H(j\omega)| = H_{TP}(j\omega) \cdot (0.5 + 0.5\cos(\pi\omega)), \qquad H_{TP}(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

Der Cosinus lässt sich nach (33) als Summe zweier Exponentialfunktion schreiben und so einfach zurück transformieren. Die Konstante lässt sich als $0.5 \cdot e^{-j0}$ schreiben und so zurück transformieren.
Die Multiplikation im Frequenzbereich entspricht einer Faltung im Zeitbereich (Seite 8), also einer hintereinanderschaltung von Elementen (Seite 6).

Aufgabe 5.17

a) Lässt sich analog wie in Aufgabe 12 durch Polynomdivision lösen.
b) Die Sprungantwort lässt sich nach (43) berechnen.

Aufgabe 5.18

Die Fouriertransformierten lassen sich mit dem Gesetz

$$x(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \tag{47}$$

berechnen.

Aufgabe 5.19

Aus (20) folgt

$$y_2(t) = x_2'(t) * a(t)$$

Der Betrag und das Argument berechnet sich nach Aufgabe 5.12.

6 Systeme mit Modulatoren

???/??? Modulatoren!

Aufgabe 6.11

a) Es gilt die Beziehung

$$x(t) \cdot y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi}\big(X(j\omega) * Y(j\omega)\big) \tag{48}$$

Daraus folgt $X_1(j\omega) = X(j\omega)X(j\omega)$. Für die Modulation mit $cos(3t)$ gilt

$$x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}X(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + \omega_0)) \tag{49}$$

b) Am besten graphisch lösen. □

Aufgabe 6.12

a) $x(t)$ lässt sich mit der Beziehung

$$2\pi \cdot x(-\omega) \circ\!\!-\!\!\bullet X(jt) \tag{50}$$

bestimmen. $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ folgen daraus.
b) Die Ergebnisse aus a) transformieren.

Aufgabe 6.13

Siehe Aufgabe 6.12

Aufgabe 6.14

a) $x_1(t)$ wird zu $\big(\omega_0 + \dot{x}(t)\big)\cos(\omega_0 t + x(t))$ und $\big(\omega_0 + \dot{x}(t)\big)^2 \cos(\omega_0 t + x(t))^2$, $x_2(t)$ wird zu $-\big(\omega_0 + \dot{x}(t)\big)\sin(\omega_0 t + x(t))$ und $\big(\omega_0 + \dot{x}(t)\big)^2 \sin(\omega_0 t + x(t))^2$. Beide addiert ergeben $\big(\omega_0 + \dot{x}(t)\big)^2$ und schliesslich

$$y(t) = \omega_0 + \dot{x}(t)$$

b) Eine Konstante transformiert sich wie folgt

$$A \circ\!\!-\!\!\bullet A \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega) \tag{51}$$

Für die Ableitung gilt die Formel 37 auf Seite 10.

7 Eigenschaften der Laplace-Transformation (LT)

Ein Pol-Nullstellen-Diagramm zeichnet man, indem man in der komplexen Ebene Pole der Laplace-Transformation mit einem Kreuz ($\times$) und Nullstellen mit einem Kreis ($\circ$) markiert.
Für die Laplace-Transformation gilt

$$ax(t) + by(t) \circ\!\!-\!\!\bullet aX(s) + bY(s) \tag{52}$$

a) Es gilt die Regel

$$e^{-\alpha t}\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+\alpha} \tag{53}$$

b) Löst sich mit Formel 53 und

$$(e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t)\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2} \tag{54}$$

c) Löst sich mit der Regel

$$-e^{\alpha t}\sigma(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+\alpha} \tag{55}$$

d) $te^{-2|t|}$ lässt sich schreiben als $te^{2t}\sigma(t) + te^{-2t}\sigma(-t)$, was sich mit

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s+\alpha)^n} \tag{56}$$

und

$$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}\sigma(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s+\alpha)^n} \tag{57}$$

umformen lässt.
e) siehe d)
f)