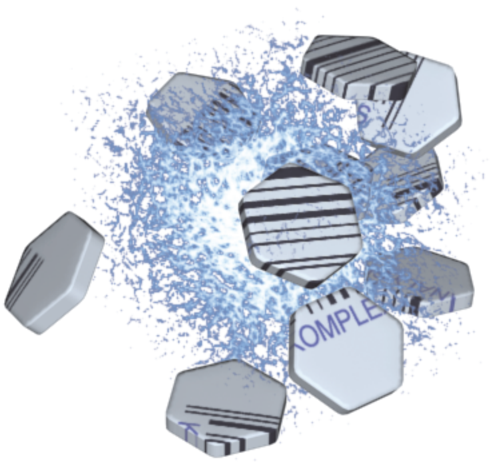
Damian Rösslers

Komplexe Analysis

SS 02

geTEXt von Johannes Bader



Das Dokument entstand aus der Mitschrift der Vorlesung Komplexe Analysis bei Prof. Rössler im Sommersemester 02 am Departement ITET der ETH Zürich.

Dieses Dokument wurde mit LaTeX unter Windows gesetzt. Die verwendete Klasse ist `paper.cls`, wobei die Überschriften modifiziert und Aufzählung, u.ä. in Farbe gesetzt wurden. Grafiken wurden mit CorelDraw 10 erzeugt und mit `psfrag` beschriftet, wobei aber unwichtige Illustrationen weggelassen wurden.

Version 3.1, Juli 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen 3
2 Eigenschaften von $\mathbb{C}$ 4
3 Exponential- und Logarithmusfunktion 7
4 Riemannsches Zahlenkugel und weitere elementare Funktionen 9
5 Analytische Funktionen 12
6 Kurven in $\mathbb{C}$ und konforme Abbildungen 18
7 Der Satz von Cauchy I 21
8 Anwendung der Integralformel 29
9 Die allgemeine Integralformel 44
10 Fourierreihen 52
11 Fourier - Transformation 62
12 Diskrete Fourieranalysis 69
13 Laplace Transformation 74
14 Zusatz 86

1 KOMPLEXE ZAHLEN

[V1-020402] Die komplexen Zahlen bilden eine Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, in der jede Gleichung

$$a_m x^m + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

wobei $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ mindestens eine Lösung hat.

ERRINNERUNG $\mathbb{R}^2$ ist die Menge der Paare (x, y) von reellen Zahlen.

DEFINITION 1.1 Das System der komplexen Zahlen besteht aus $\mathbb{R}^2$ zusammen mit den Verknüpfungen: + *Summme*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \stackrel{Def}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$\cdot$ *Multiplikation*

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \stackrel{Def}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Dieses System wird mit dem *Symbol* $\mathbb{C}$ bezeichnet. Die Zahl $(0, 1)$ wird i geschrieben, wobei $i^2 = -1$. Man identifiziert $\mathbb{R}$ mit der Achse $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$.

RECHENREGELN für $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (x, y) = (x, 0) + i(0, y) &= x + iy & i^2 &= -1 \\ z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 & 1 \cdot z &= z \\ z_1 + (z_2 + z_3) &= (z_1 + z_2) + z_3 & z + 0 &= z \\ z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \end{aligned}$$

Für jedes $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ gibt es ein eindeutiges Element $z' \in \mathbb{C}$, so dass $z \cdot z' = 1$. Für $z = x + iy$ gilt:

$$z' = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Man schreibt $\frac{1}{z}$, *Inverse*, für z'. Wenn $z = x + i \cdot 0$, dann gilt $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + i \cdot 0$. Die Formel für $\frac{1}{z}$ erhält man so:

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

Zusammenfassung

1. Die komplexen Zahlen bilden eine Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, in der jede Gleichung $a_m x^m + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0$, wobei $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ eine Lösung hat.

2. Das System der komplexen Zahlen besteht aus $\mathbb{R}^2$ zusammen mit den Verknüpfungen Summe, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \stackrel{Def}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ und Multiplikation

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \overset{Def}{=} (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. Dieses System wird mit dem Symbol $\mathbb{C}$ bezeichnet.

3. Es gelten die Rechenregeln:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, 0) + i(0, y) = x + iy & i^2 &= -1 \\ z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 & 1 \cdot z &= z \\ z_1 + (z_2 + z_3) &= (z_1 + z_2) + z_3 & z + 0 &= z \\ z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \end{aligned}$$

4. Für jedes $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gibt es ein eindeutiges Element $z' \in \mathbb{C}$, so dass $z \cdot z' = 1$ wobei

$$z' = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

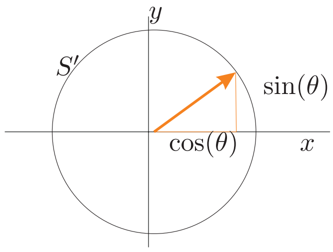
2 EIGENSCHAFTEN VON $\mathbb{C}$

Es sei $z = x + iy$. Die Zahl y heisst *Imaginärteil*, die Zahl x heisst *Realteil*.

$$x = \Re(z) \qquad y = \Im(z)$$

Die *Norm* oder der *Absolutbetrag* von z ist die reelle Zahl $\sqrt{x^2 + y^2}$ und wird mit $|z|$ bezeichnet.

Polardarstellung Aus der Trigonometrie wissen wir, dass jedes z in S' in der Form $(\cos\theta, \sin\theta)$ geschrieben werden kann.

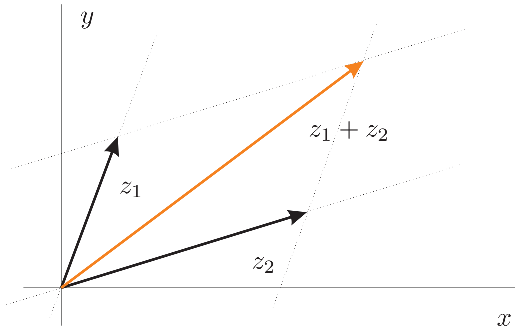


Komplex ausgedrückt: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gibt es ein $\theta \in \mathbb{R}$, so dass $z = \cos\theta + i\sin\theta$.
Weiter: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

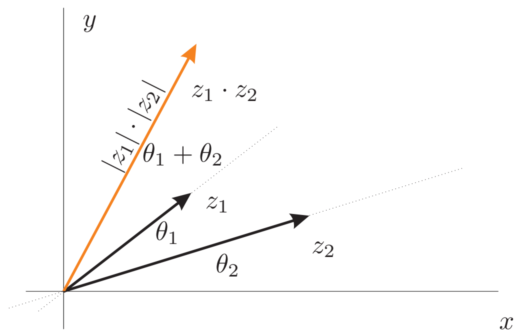
$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$$

und deshalb gibt es ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \Leftrightarrow \qquad z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$



(a) Addition



(b) Subtraktion

Fig. 1: Geometrische Deutung von $+$ und $\cdot$

Das *Argument* $\arg(z)$ ist die Zahl θ, welche bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt ist.

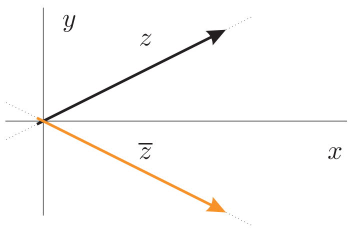
Rechenregeln Es gilt:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi \cdot k$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$. Wenn man θ immer in $[0, 2\pi)$ wählt, dann ist das Argument eindeutig bestimmt und heisst *Hauptwert* des Arguments.
Man kann auch θ in dem Intervall $[y_0, y_0 + 2\pi)$ wählen, für irgendein $y_0 \in \mathbb{R}$.

Geometrische Deutung von $+$ und $\cdot$ *Siehe Abbildung 1(a) und 1(b).*

Komplexe Konjugation $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Man schreibt $\overline{z}$ für $x - iy$; $\overline{z}$ ist die *komplex Konjugierte* von z.



Rechenregeln $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$\overline{\overline{z}} = z \qquad |z| = |\overline{z}|$$
$$\Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$$
$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

Zusammenfassung

5. Es sei $z = x + iy$. Die Zahl y heisst Imaginärteil, die Zahl x heisst Realteil.

6. Die Norm oder der Absolutbetrag von z ist die reelle Zahl $\sqrt{x^2 + y^2}$ und wird mit $|z|$ bezeichnet.

7. Komplex ausgedrückt: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gibt es ein $\theta \in \mathbb{R}$, so dass $z = \cos\theta + i \sin\theta$.

8. Das Argument $\arg(z)$ ist die Zahl θ, welche bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt ist.

9. $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Man schreibt $\overline{z}$ für $x - iy$; $\overline{z}$ ist die Konjugierte von z.

10. $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$\overline{\overline{z}} = z \qquad |z| = |\overline{z}|$$
$$\Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$$
$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

3 EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUSFUNKTION

Errinnerung

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots \end{aligned}$$

Die Definition von e^x lässt sich erweitern:

Satz 3.1 Die Reihe $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ und ergibt die Exponentialfunktion e^z, $z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung Aus der Definition konvergiert eine Folge von komplexen Zahlen genau dann, wenn sie als Folge von Vektoren konvergiert.

[V2-040402] Wir berechnen für $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i \sin\theta \end{aligned}$$

Das bedeuted: für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $z = |z|\, e^{i\theta}$ eindeutig, vorausgesetzt $\theta \in [0, 2\pi)$

Rechenregeln

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{z_1} e^{z_2} & e^z &\neq 0 \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \\ |e^z| &= e^{\Re(z)} \\ e^z &= 1 \Leftrightarrow z = 2\pi \cdot n & n &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Die Logarithmusfunktion wird wie folgt definiert

$$\log z \overset{def}{=} \ln|z| + i \cdot \arg(z)$$

Satz 3.2 Es gelten folgende zwei Punkte:

- $e^{\log z} = z$, wenn $z \neq 0$, unabhängig von der Wahl eines Wertebereichs für arg
- Wenn der Wertebereich von arg das Interval $I = [y_0, y_0 + 2\pi)$ ist und $\Im(z) \in I$, dann ist $\log(e^z) = z$

Beweis der obigen zwei Aussagen:

- $e^{\log z} = e^{\ln|z|+i\arg z} = e^{\ln|z|} \cdot e^{i\arg(z)} = |z|\, e^{i\arg(z)} = z$
- Der zweite Beweis erfolgt ähnlich

$$\begin{aligned}\log e^z &= \ln|e^z| + i\arg e^z \\ &= \ln\left|e^{\Re(z)}e^{i\Im(z)}\right| + i\arg(e^{\Re(z)} \cdot e^{i\Im(z)}) \\ &= \Re(z) + i\cdot\Im(z) + i2\pi k && k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

wobei aber

$$\begin{aligned}\left|\Im(z) - \arg(e^{i\Im(z)})\right| &< 0 \\ \Rightarrow k &= 0 \qquad \square\end{aligned}$$

Rechenregeln $\log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) + 2\pi k$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.

Potenzieren und Radizieren Man definiert

$$z^w = e^{w\log(z)}$$

Der Ausdruck macht nur Sinn, wenn $z \neq 0$, wenn $z \in \mathbb{R}$ und $w = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$z^w = \sqrt[b]{z^a}$$

unabhängig von arg. Ausserdem leitet man aus Satz 3.2

$$\left(z^{\frac{1}{m}}\right)^m = z$$

ab, also ist $z^{\frac{1}{m}}$ eine Lösung der Gleichung

$$w^m = z \qquad (*)$$

Andere Lösungen erhält man, in dem man andere Wertebereiche für arg wählt.

Satz 3.3 Die Lösungen von w in $(*)$ sind:

$$\sqrt[m]{|z|} \cdot e^{i\frac{\theta_0}{m}}, \ldots, \sqrt[m]{|z|} \cdot e^{i\frac{\theta_{m-1}}{m}}$$

mit

$$\theta_0 = \arg(z), \qquad \theta_1 = \arg(z) + 2\pi, \qquad \theta_{m-1} = \arg(z) + (m-1)\cdot 2\pi$$

Bemerkung Allgemeiner gilt der *Fundamentalsatz der Algebra*. Es sei:

$$P(w) = a_m w^m + a_{m-1}w^{m-1} + \cdots + a_0$$

wobei $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$. Dann gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ und $m_1, \ldots, m_k \geq 1$, so dass:

$$P(w) = a_m(w-\alpha_1)^{m_1} \cdot (w-\alpha_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (w-\alpha_k)^{m_k}$$

Der Beweis hierfür erfolt später.
$P(w) = 0$ hat die Lösungen $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \subset \mathbb{C}$

Zusammenfassung

11. Für den Sinus und Cosinus gilt

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

12. Die Reihe $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ und ergibt die Exponentialfunktion e^z, $z \in \mathbb{C}$

13. $z = |z|\, e^{i\theta}$

14. Die Logarithmusfunktion wird wie folgt definiert

$$\log z \overset{def}{=} \ln |z| + i \cdot \arg(z)$$

15. $\log(e^z) = z$ und $e^{\log z} = z$

16. $\log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) + 2\pi k$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.

17. Es gilt der Fundamentalsatz der Algebra. Es sei:

$$P(w) = a_m w^m + a_{m-1} w^{m-1} + \cdots + a_0$$

wobei $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}$. Dann gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ und $m_1, \dots, m_k \geq 1$, so dass:

$$P(w) = a_m (w - \alpha_1)^{m_1} \cdot (w - \alpha_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (w - \alpha_k)^{m_k}$$

$P(w) = 0$ hat die Lösungen $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \subset \mathbb{C}$

4 RIEMANNSCHES ZAHLENKUGEL UND WEITERE ELEMENTARE FUNKTIONEN

Die Riemannsche Zahlenkugel, oder abgeschlossene komplexe Ebene, ist eine *Kompaktifizierung* von $\mathbb{C}$, sie wird eingeführt um weniger Unterscheidungen in Konvergenz-Aussagen machen zu müssen.

Definition 4.1 Die Riemannsche Zahlenkugel ist:

$$\overline{\mathbb{C}} \overset{Def}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

∞ wird *Punkt im Unendlichen* genannt. Weiter führt man folgende Terminologie ein: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = z_0$$
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

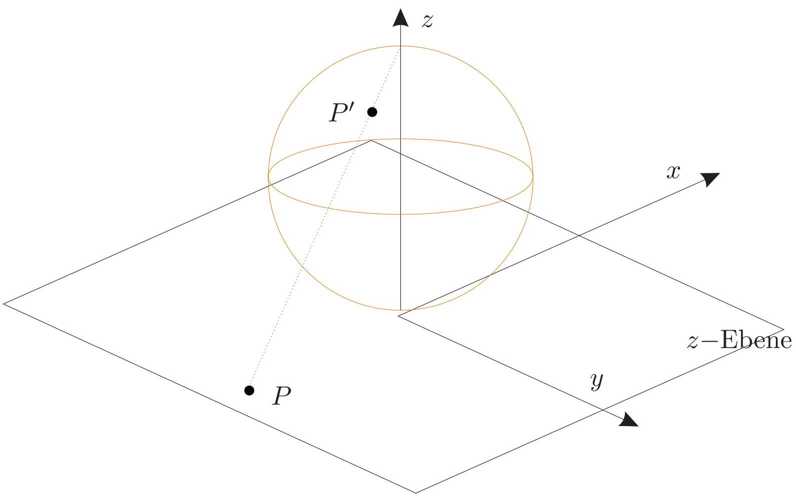


Fig. 2: *Riemannsche Zahlenkugel: Durch die sogenannte stereographische Projektion werden die Punkte der Ebene auf die Sphäre abgebildet. Der Punkt P wird mit dem Pol der Sphäre (∞) verbunden, der Schnittpunkt mit der Sphäre bildet dann die Projektion P'.*

ERRINNERUNG Konvergenz in $\mathbb{C} \Leftrightarrow$ Konvergenz in $\mathbb{R}^2$, genauer: Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion und $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in \mathbb{R}^2$. $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}) = \vec{x}_1 \Leftrightarrow$ für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass wenn $|\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta(\varepsilon)$, dann gilt:

$$|g(\vec{x}) - \vec{x}_1| < \varepsilon$$

Erweiterung der trigonometrischen Funktionen

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

RECHENREGELN

- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
- $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
- $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

Ähnlich defniniert man die Hyperbolisch Trigonometrischen Funktionen

- $\cosh = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
- $\sinh = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

RECHENREGELN

- $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$
- $\sinh(z + w) = \sinh(z) \cdot \cosh(w) + \sinh(w) \cdot \cosh(z)$
- $\cosh(z + w) = \cosh(z) \cdot \cosh(w) + \sinh(z) \cdot \sinh(w)$

Möbiusfunktion Die Möbiusfunktion hat die Form

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

PROB Eine Möbiusfunktion führt Kreis / Geraden auf Kreise / Geraden über.

BEWEIS [V3-090402] Man betrachtet die Funktionen:

$$T_1 : z \mapsto z + \frac{d}{c} \qquad T_2 : z \mapsto \frac{1}{z}$$

$$T_3 : z \mapsto \frac{bc-ad}{c} \cdot z \qquad T_4 : z \mapsto z + \frac{a}{c}$$

Dann ist die Möbiusfunktion die Komposition

$$T : T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$$

Die Funktionen T_1, T_3, T_4 sind Translationen und Streckungen, d.h. Kreis/Geraden werden auf Kreis/Geraden abgebildet. Bleibt zu zeigen: T_2 bildet Kreis/Geraden auf Kreis/Geraden ab. Aus der analytischen Geometrie wissen wir, Kreis/Geraden werden gegeben durch eine Gleichung der Form:

$$Ax + By + C(x^2+y^2) = D \qquad (*) \qquad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

T_2 hat die Form:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Wenn $(*)$ gilt, dann gilt auch

$$A\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + B\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) + C\left(\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2\right) = D$$

Zusammenfassung

18. Die Riemannsche Zahlenkugel, oder abgeschlossene komplexe Ebene, ist eine Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$, sie wird eingeführt um weniger Unterscheidungen in Konvergenz-Aussagen machen zu müssen.

19. Erweiterung der trigonometrischen Funktionen lautet

$$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

20. Wichtige Rechenregeln für die trigonometrischen Funktionen sind

- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

- $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
- $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

21. Die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen

- $\cosh = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
- $\sinh = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

22. Wichtige Rechenregeln für die hyperbolischen Funktionen sind

- $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$
- $\sinh(z+w) = \sinh(z) \cdot \cosh(w) + \sinh(w) \cdot \cosh(z)$
- $\cosh(z+w) = \cosh(z) \cdot \cosh(w) + \sinh(z) \cdot \sinh(w)$

23. Die Möbiusfunktion hat die Form

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Eine Möbiusfunktion führt Kreis / Geraden auf Kreise / Geraden über

5 ANALYTISCHE FUNKTIONEN

DEFINITION 5.1 Ein *Gebiet* ist eine offene, zusammenhängende Menge in $\mathbb{C}$

ERRINNERUNG Nicht zusammenhängend sind zwei Mengen U_1 und U_2 wenn gilt:

$$U = U_1 \cup U_2 \qquad\qquad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

DEFINITION 5.2 Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : A \mapsto \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in A$. f ist in z_0 *differenzierbar* (oder „analytisch“ oder „holomorph“), wenn

$$\lim_{z \to z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

existiert. Wir nennen den Grenzwert *Ableitung* von f an der Stelle z_0 und bezeichnen ihn mit $f'(z_0)$ oder auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$.

RECHENREGELN Sei $A \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : A \mapsto \mathbb{C}$ analytisch (d.h. in jedem $z_0 \in A$ analytisch).

1. $af + bg$ ist auch analytisch $\forall\, a, b \in \mathbb{C}$
2. $(f \cdot g)$ ist auch analytisch und $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
3. $\frac{f}{g}$ ist auch analytisch und

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

4. Eine rationale Funktion

$$\frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^2}{b_0 + b_1 z + \cdots b_m z^m}$$

ist analytisch in jedem $z_0 \in A$, $b_0 + b_1 z + \cdots b_m z^m \neq 0$

5. Kettenregel: Seien $A, B \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : A \mapsto \mathbb{C}$, $g : B \mapsto \mathbb{C}$ zwei Funktionen wobei $f(A) \subset B$ und f, g analytisch, dann gilt:

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$$

Deutung der Ableitung .[V4-110402] $f(z_0 + \Delta z) - f(z) \approx f'(z_0) \cdot \Delta z$. Folgender Satz ermöglicht viele analytische Funktionen zu bilden:

Satz 5.3 Seien $f_0, f_1, \ldots$ holomorphe Funktionen (d.h analytische Funktionen) von einem Gebiet $A \subset \mathbb{C}$. Es gelte:

$$|f_k(z)| \leq c_k \qquad \forall\, k \geq 0, \forall\, z \in A$$

Das heisst, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ existiert, dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$, $\forall\, z \in A$. Ausserdem existiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(z)$ und es gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_z'(z)$$

Beispiel 5.I Sei $f_k = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$. Wenn für $p > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| p^k$ konvergiert, dann konvergiert auch

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^z \quad \text{und} \qquad g'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Beispiel 5.II Die Exponentialfunktion kann geschrieben werden als

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

und ist somit analytisch $\forall\, z \in \mathbb{C}$, da $\sum \frac{1}{n!} p^n$ konvergiert $\forall\, p > 0$. Weiter gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(e^z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z) + \cdots = 0 + 1 + \frac{2z}{2!} + \cdots = e^z$$

Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Exkurs Mehrdimensionale Differentialgleichungen. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ist eine offene Teilmenge, $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$, $m, n \geq 0.$, $\vec{x}_0 \in U$

Definition 5.4 Die Funktion f ist in $\vec{x}_0$ *reell differenzierbar* wenn es eine lineare Abbildung $Df(\vec{x}_0) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ gibt, so dass der Grenzwert

$$\lim_{x_0 \to x} \frac{|\underbrace{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)}_{\text{realer Zuwachs}} - \underbrace{Df(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)}_{\text{lin. Annäherung des Zuwachs}}|}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = 0$$

existiert.

Es sei $f = \big(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)\big)$. Man schreibt $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}$ wobei $k \in \{1,\dots,n\}$, $l \in \{1,\dots,m\}$ für die (partielle) Ableitung von $f_k(x_1,\dots,x_m)$ in die Richtung x_l. Wenn f in $\vec{x}_0$ reel differenzierbar ist, dann gibt es alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}$ und $Df(\vec{x}_0)$ hat die Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Satz 5.5 Wenn $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}$ existiert und stetig ist in ganz U, dann gibt es ein $Df(\vec{x}_0)$ für alle $x_0 \in U$.

Folgender Satz sagt, dass ein infinitesimaler reell differenzierbarer Isomorphismus ein *lokaler* Isomorphismus ist.

Satz 5.6 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und $f : U \mapsto \mathbb{R}^m$, $f = \big(f_1(x_1,\dots,x_m), \dots, f_n(x_1,\dots,x_m)\ \big)$ eine Funktion. Wenn $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}$ stetig ist in U $\forall\, k,l \geq 1$ und $x_0 \in U$, so dass $\det Df(\vec{x}_0) \neq 0$, dann gibt es ein $V \subseteq U$ mit $\vec{x}_0 \in V$, V offen so dass:

- $f(V)$ offen
- $f|V : V \mapsto f(u)$ ist bijektiv ($f|V = f$ *eingeschränkt auf* V)
- Die Umkehrfunktion $g \overset{def}{=} (f|V)^{-1} : f(V) \to V$ ist *reell differenzierbar* in ganz V und $\frac{\partial g_k}{\partial x_l}$ ist stetig $\forall\, k,l \geq 1$

Satz 5.7 (Kettenregel) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei offene Teilmengen, $\vec{x}_0 \in U$ und

$f : U \mapsto \mathbb{R}^n$	reell differenzierbar in U
$g : V \mapsto \mathbb{R}^l$	reell differenzierbar in V

Dann ist $g \circ f$ reell differenzierbar in U und

$$D(g \circ f)(\vec{x}_0) = Dg\big(f(\vec{x}_0)\big) \cdot Df(\vec{x}_0)$$

Satz 5.8 (CR-Differentialgleichung) $A \subseteq \mathbb{C}$, $f : A \mapsto \mathbb{C}$ eine Funktion, $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$,

$$f(x, iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Dann gibt es die *komplexe Ableitung* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$ gesetzt der Fall es gibt $Df(z_0)$ und

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Beweis Aus Voraussetzung existiert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Insbesondere gibt es

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(z_0)}{x + iy_0 - z_0} \qquad (*)$$

Man berechnet $(*)$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) + i \cdot v(x, y_0) - u(x_0, y_0) - i \cdot v(x_0, y_0)}{x + iy_0 - z_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

[V5-160402] Ähnlich in der y-Richtung

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(z_0)}{x_0 + iy - z_0} \\
&= \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x_0 + iy - x_0 - iy_0} \\
&= \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\
&= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Reelle Differenzierbarkeit von f

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z \to 0} &= \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) \\
&\Leftrightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - f'(z) \cdot \Delta z}{\Delta z} = 0 \\
&\Leftrightarrow f \text{ reell differenzierbar}
\end{aligned}$$

Die „Multiplikation mit $f'(z_0)$“ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ der Ebene in die Ebene.

Lemma 5.9 Eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ stellt als lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Multiplikation mit einer komplexen Zahl dar, gesetzt den Fall $a = d$ und $b = -c$. Die entsprechende komplexe Zahl ist einfach $a + ic$ oder $d - ib$

Beweis

$$\begin{aligned}
(a + ic)(x + iy) &= (ax - cy) + i(cx + ay) \\
&= \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Aus Hypothese ist jetzt f reell differenzierbar. Aus Definition gilt:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)-Df(z_0)(z-z_0)|}{|z-z_0|} = 0 \qquad (*)$$

mit

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Da es sich um eine CR-Differentialgleichung handelt gilt $a = d$, $b = -c$, also stellt $Df(z_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Multiplikation mit

$$z' = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

dar.

$$\begin{aligned}(*) \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-z'(z-z_0)}{z-z_0} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= z' = f'(z_0)\end{aligned}$$

Beispiel 5.III Beweise, dass der Hauptwert von log in $\{z|\Re(z) > 0\}$ holomorph sind.

$$\begin{aligned}\log z &= \ln|z| + i\cdot\arg(z) \\ &= \ln(x+iy) = \Big(\underbrace{\ln\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)}, \underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}_{v(x,y)}\Big)\end{aligned}$$

Errinnerung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

also

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2}\end{aligned} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{1+(x/y)^2}\cdot y\cdot\frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Ausserdem sind:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

stetig. Wegen Satz 5.5 ist man fertig.

Satz 5.10 Sei $f : A \mapsto \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in A$, $f'(z_0) \neq 0$

a) Es gibt eine offene Menge $U \subseteq A$, U offen und $z_0 \in U$ so dass $f|U \to f(U)$ bijektiv ist.

b) Die Umkehrfunktion $g = (f|U)^{-1} : f(U) \mapsto U$ ist auch analytisch.

Beweis .[V6-180402]

a) folgt aus Satz 5.6

b) gilt aufgrund der Kettenregel (Satz 5.7):

$$D(g \circ f) = D(\text{Identität}) = \text{Identität} = Dg \circ Df$$

In $z_0 \in U$ sei

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} Dg\big(f(z_0)\big) &= \big(Df(z_0)\big)^{-1} \\ &= \frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{D} & -\frac{b}{D} \\ -\frac{c}{D} & \frac{a}{D} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei $D = ad - bc$. Wegen der CR-Differentialgleichung gilt $a = d$, $b = -c$. Ausserdem erfüllt g auch die CR-Differentialgleichung in $f(z_0$

$$= \frac{1}{D}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung

24. Ein Gebiet ist eine offene, zusammenhängende Menge in $\mathbb{C}$

25. Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : A \mapsto \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in A$. f ist in z_0 differenzierbar oder analytisch oder holomorph, wenn

$$\lim_{z \to z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

existiert. Wir nennen den Grenzwert Ableitung von f an der Stelle z_0 und bezeichnen ihn mit $f'(z_0)$ oder auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$.

26. Die aus dem Reellen bekannten Regeln gelten auch in $\mathbb{C}$

27. Es sei $f = \big(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)\big)$. Man schreibt $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}$ wobei $k \in \{1,\dots,n\}$, $l \in \{1,\dots,m\}$ für die (partielle) Ableitung von $f_k(x_1,\dots,x_m)$ in die Richtung x_l. Wenn f in $\vec{x}_0$ reel differenzierbar ist, dann gibt es alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}$ und $Df(\vec{x}_0)$ hat die Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

28. Die Kettenregel lautet: $g \circ f$ ist reell differenzierbar und

$$D(g \circ f)(\vec{x}_0) = Dg\big(f(\vec{x}_0)\big) \cdot Df(\vec{x}_0)$$

29. $A \subseteq \mathbb{C}$, $f : A \mapsto \mathbb{C}$ eine Funktion, $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$,

$$f(x, iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Dann gibt es die *komplexe Ableitung* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$ gesetzt der Fall es gibt $Df(z_0)$ und

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

30. Eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ stellt als lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Multiplikation mit einer komplexen Zahl dar, gesetzt den Fall $a = d$ und $b = -c$. Die entsprechende komplexe Zahl ist einfach $a + ic$ oder $d - ib$

31. Sei $f : A \mapsto \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in A$, $f'(z_0) \neq 0$

a) Es gibt eine offene Menge $U \subseteq A$, U offen und $z_0 \in U$ so dass $f|U \to f(U)$ bijektiv ist.

b) Die Umkehrfunktion $g = (f|U)^{-1} : f(U) \mapsto U$ ist auch analytisch.

6 KURVEN IN $\mathbb{C}$ UND KONFORME ABBILDUNGEN

Definition 6.1 a) Eine *Kurve* in $\mathbb{C}$ ist eine stetige Funktion von einem Intervall $[a,b]$ in $\mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

b) Eine Kurve $\gamma(t) : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ ist *stückweise* C^1 wenn es $a_0,\dots,a_m \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$

- $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ existiert und ist stetig auf (a_k, a_{k+1}) für $k = 0,\dots,m-1$
- $\lim_{t\to a_k^+} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ und $\lim_{t\to a_k^-} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ existieren für $k = 0,\dots,m-1$

(a) C^1 Kurve (b) stückweise C^1 Kurve (c) unstetige Kurve

Fig. 3: Kurven in $\mathbb{C}$

c) $\gamma(t)$ heisst C^1 wenn $m = 1$ in (b).

Beispiel 6.I Siehe Fig. 3

Satz 6.2 Sei $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine C^1 Kurve, $f : A \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, A ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Es sei $f(\gamma)$ die Kurve $f\big(\gamma(t)\big) : [a, b] \to \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma)}{\mathrm{d}t}(t) = f'\big(\gamma(t)\big)\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

Beweis Kettenregel (5.7) auf Seite 14

Korollar 6.3 Sei $f : A \to \mathbb{C}$ holomorph im Gebiet A. Wenn

$$f'(z) = 0 \qquad \forall\, z \in A$$

dann ist f *konstant*.

Beweis Es seien $z_0, z_1 \in A$. Dann gibt es eine C^1 Kurv $\gamma(t) : [a', b'] \to A$ und $a, b \in (a', b')$ mit $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z_1$. Es sei $\gamma(t) = \big(u(t), v(t)\big)$. Nach Satz 6.2 gilt:

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma)}{\mathrm{d}t}(t) = f'\big(\gamma(t)\big) \cdot \frac{\mathrm{d}(\gamma)}{\mathrm{d}t} \qquad = 0 \quad (*)$$

$f(\gamma)(t) = \big(u_1(t), v_1(t)\big)$, wegen $(*)$ gilt, dass $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = 0$ und $\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = 0$ in dem Intervall (a', b') und aus der reellen Analysis folgt $u_1(a) = u_1(b)$ und $v_1(a) = v_1(b)$, deshalb:

$$f\big(\gamma(a)\big) = f\big(\gamma(b)\big) \Leftrightarrow f(z_0) = f(z_1)$$

Definition 6.4 Es sei A ein Gebiet und $f : A \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heisst *winkeltreu* oder *konform*, wenn für jedes $z \in A$ und alle Paare (γ_1, γ_2) von C^1 Kurven, die sich in z schneiden gilt:

$$\arg\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_1\right) - \arg\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_2\right) \in z = \arg\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\gamma)\right) - \arg\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\gamma_2)\right) \in f(z)$$

Bis auf ein Vielfaches von 2π.

Satz 6.5 (Notation wie in (6.4)). Wenn $f : A \to \mathbb{C}$ analytisch ist und $f'(z) \neq 0$, $\forall\, z \in A$, dann ist f winkeltreu.

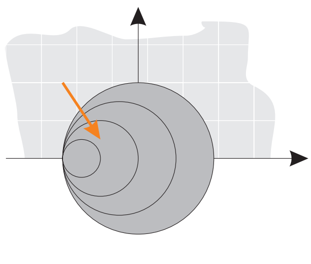


Fig. 4: Die obere Halbebene wird auf die Einheitsscheibe abgebildet

(a) Einfach zusammenhängend

(b) Zusammenhängend

Fig. 5: Unterschied zwischen zusammenhängend und einfach zusammenhängend

Beweis Folgt aus Satz 6.2

Satz 6.6 (Notation wie in (6.4)). Wenn f reell stetig differenzierbar ist und winkeltreu, dann ist f analytisch und $f' \neq 0$ *ohne Beweis*

Seien A_1, $A_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete. A_1 und A_2 heissen *konform äquivalent*, wenn es eine Funktion $f : A_1 \to A_2$ gibt, wobei f analytisch ist und $f'(z) \neq 0$, $\forall\, z \in A_1$

Beispiel 6.II Die Möbiusfunktion:

$$\frac{1+iz}{1-iz}$$

bildet die obere Halbebene auf die Einheitsscheibe ab *siehe Fig 6*. Das Beispiel ist ein Spezialfall von dem Riemannschen Abbildungssatz.

Satz 6.7 A sei ein ein einfach zusammenhängendes Gebiet *siehe Fig 6*, $A \neq \mathbb{C}$. Dann ist A konform äquivalent zur Einheitsscheibe. Einfach zusammenhängend bedeutet, dass das Gebiet keine Löcher hat.

Beispiel 6.III Folgende Funktion, die *Joukowski Funktion*

$$z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$$

bildet $\{z|\,|z| > 1\}$ konform auf $\mathbb{C}\backslash\{z| -1 \leq \Re(z) \leq 1, \Im(z) = 0\}$ ab.

Zusammenfassung

32. Eine Kurve in $\mathbb{C}$ ist eine stetige Funktion von einem Intervall $[a, b]$ in $\mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Eine Kurve $\gamma(t) : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ ist stückweise C^1 wenn es $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$

- $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ existiert und ist stetig auf (a_k, a_{k+1}) für $k = 0, \dots, m-1$
- $\lim_{t \to a_k^+} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ und $\lim_{t \to a_k^-} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ existieren für $k = 0, \dots, m-1$

$\gamma(t)$ heisst C^1 wenn $m = 1$.

33. Sei $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine C^1 Kurve, $f : A \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, A ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Es sei $f(\gamma)$ die Kurve $f\big(\gamma(t)\big) : [a, b] \to \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}f(\gamma)}{\mathrm{d}t}(t) = f'\big(\gamma(t)\big)\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

34. Sei $f : A \to \mathbb{C}$ holomorph im Gebiet A. Wenn $f'(z) = 0\ \forall\ z \in A$ dann ist f konstant.

35. Es sei A ein Gebiet und $f : A \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heisst winkeltreu oder konform, wenn für jedes $z \in A$ und alle Paare (γ_1, γ_2) von C^1 Kurven, die sich in z schneiden gilt:

$$\arg\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_1\right) - \arg\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_2\right) \in z = \arg\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\gamma)\right) - \arg\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\gamma_2)\right) \in f(z)$$

Bis auf ein Vielfaches von 2π.

36. Wenn $f : A \to \mathbb{C}$ analytisch ist und $f'(z) \neq 0$, $\forall\ z \in A$, dann ist f winkeltreu.

37. Wenn f reell stetig differenzierbar ist und winkeltreu, dann ist f analytisch und $f' \neq 0$.

38. Seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete. A_1 und A_2 heissen konform äquivalent, wenn es eine Funktion $f : A_1 \to A_2$ gibt, wobei f analytisch ist und $f'(z) \neq 0$, $\forall\ z \in A_1$

7 DER SATZ VON CAUCHY I

Der Satz von Chauchy I sagt, dass jede analytische Funktion (lokal) eine Stammfunktion besitzt

komplexe Linienintegrale Sei $\gamma[a, b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise C^1-Kurve und A ein Gebiet $\subset \mathbb{C}$ mit $\gamma([a, b]) \subseteq A$ und $f : A \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

Definition 7.1 [V7-230402]

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

genauer

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

Da sonst $\gamma(t)$ in den Knickpunkten keinen Sinn macht. Die Notation ist die selbe wie in Definition 6.1.

Beispiel 7.I Sei C der Einheitskreis und $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$

$$\begin{aligned}
\int_C z^n &= \int_0^{2\pi} \overbrace{(\cos t + i \sin t)}^{e^{it}}{}^n \cdot \overbrace{(-\sin t + i\cos t)}^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{it}} \cdot \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\cos(nt) + i\sin(nt)\big)(-\sin t + i\cos t)\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{2\pi} \big(\cos(nt)\cdot \sin t + \sin(nt)\cdot\cos t\big)\mathrm{d}t \\
&\qquad - i \cdot \int_0^{2\pi} \big(\sin(nt)\cdot\sin t - \cos(nt)\cdot\cos(t)\big)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

mit den trigononetrischen Formel erhält nan

$$= -\int_0^{2\pi} \sin\big((n+1)t\big)\mathrm{d}t - i\int_0^{2\pi}\cos\big((n+1)t\big)\mathrm{d}t = 0$$

Beispiel 7.II Sei wieder C der Einheitskreis

$$\int_C \frac{1}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it}\cdot i \cdot e^{it}\mathrm{d}t = 2\pi i$$

Ein wichtiger Unterschied zum Beispiel 7.I ist die Singularität in 0.

Satz 7.2 Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : A \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wenn es ein $F : A \to \mathbb{C}$ gibt, so dass $F' = f(z)$, dann gilt für jede Kurve $\gamma : [a,b] \to A$

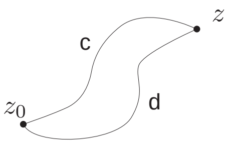
$$\int_\gamma f = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

Insbesondere ist

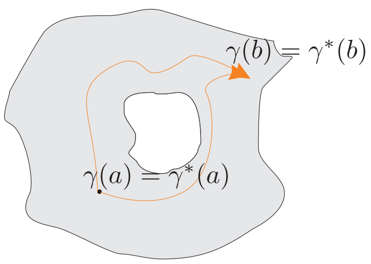
$$\int_\gamma f = 0$$

wenn γ geschlossen ist.

Bemerkung F heisst *Stammfunktion von* f, sie ist nur bis auf eine Konstante bestimmt. Die Bedingung impliziert, dass das Integral unabhängig vom Weg ist, wenn f eine Stammfunktion besitzt. *Siehe Fig. 6(a)*



(a) $\int_\gamma f = \int_{\gamma^*} f$



(b) $z \to z_0$

Fig. 6: Die Wegunabhängigkeit und Bedeutung von $z_0 \to z$

SATZ 7.3 Sei $f : A \to \mathbb{C}$ stetig und A ein Gebiet, wenn

$$\int_\gamma f = 0$$

für alle geschlossenen Kurven $\gamma \subseteq A$, dann ist

$$F(z) = \int_{z_0 \to z} f$$

eine Stammfunktion von f, wobei $z_0 \to z$ irgendeine Kurve von z_0 nach z ist *siehe Fig 6(b)*, $z_0 \in A$

BEMERKUNG $\Rightarrow$ Es gibt keine Stammfunktion für $\frac{1}{z}$, da wie in Beispiel 7.II gezeigt $\int_C \frac{1}{z} \neq 0$

BEISPIEL 7.III Sei $f = z^n$ eine Funktion und $A = \mathbb{C}$ eine Menge

$$F(z) = \int_0^1 f(tz) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(tz)\mathrm{d}t$$

(tz) = parametrisierte Gerade, $t = [0, 1]$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 t^m z^m z \mathrm{d}t \\
&= z^{m+1} \int_0^1 t^m \mathrm{d}t \\
&= z^{m+1} \left[\frac{t^{m+1}}{m+1} \bigg|_0^1 \right] \\
&= \frac{z^{m+1}}{m+1}
\end{aligned}$$

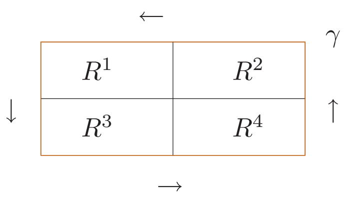


Fig. 7: Beweis des Korollar 7.6

Satz 7.4 [V8-250402] Sei A ein konvexes Gebiet und $f : A \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, dann besitzt f eine Stammfunktion in A. Insbesondere gilt:

$$\int_\gamma f = 0$$

für jede geschlossene Kurve in A. Beide Aussagen gelten auch wenn in einem $w \in A$ f nur stetig ist. Das wird eine wesentliche Rolle spielen, auch wenn es eigentlich eine falsche Hypothese ist, denn die Funktion muss immer holomorph sein.

Definition 7.5 Ein Gebiet A heisst *konvex*, wenn für Punkte z_0 und $z_1 \in A$ die Punkte

$$\varepsilon z_0 + (1-\varepsilon) z_1 \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,1)$$

auch in A liegen.

Beispiel 7.IV $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist nicht konvex.

Korollar 7.6 Seien A und f wie in Satz 7.4 und γ ein Viereck. Dann gilt:

$$\int_\gamma f = 0$$

Beweis

$$\begin{aligned}\left|\int_R f\right| &= \left|\int_{R^1} f + \int_{R^2} f + \int_{R^3} f + \int_{R^4} f\right| \\ &\leq \left|\int_{R^1} f\right| + \left|\int_{R^2} f\right| + \left|\int_{R^3} f\right| + \left|\int_{R^4} f\right|\end{aligned}$$

Für mindestens einen R^i, $i \in \{1,2,3,4\}$ gilt

$$\left|\int_{R^i} f\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_R f\right|$$

daraus folgt

$$\Rightarrow \left|\int_{R^n} f\right| \geq \frac{1}{4^n}\left|\int_R f\right|$$

Der Durchschnitt

$$\bigcap_{n\geq 1} R_n = \{w_0\}$$

Aus Hypothese ist f in w_0 holomorph. Wir schreiben nun die Definition der Holomorphie hin:
Es sei $\varepsilon > 0$ dann gibt es ein $\delta > 0$ so dass

$$\left|\frac{f(z)-f(w_0)}{z-w_0} - f'(w_0)\right| < \varepsilon$$

Wenn $|z-w_0| < \delta$. Der Umfang von R sei P, dann ist der Umfang von R_n

$$R_n = \frac{P}{2^n}$$

Wir wählen uns ein n so gross dass

$$\frac{P}{2^n} < \delta$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}|f(z)-f(w_0)-(z-w_0)f'(w_0)| &< \varepsilon \cdot |z-w_0| \\ &\leq \varepsilon \cdot \frac{P}{z^n}\end{aligned}$$

$\forall\ z$ innerhalb und auf R^n. (Beachte: Der Umfang ist natürlich grösser als jede Distanz innerhalb R^n. Man rechnet:

$$\begin{aligned}\left|\int_R f\right| &\leq 4^n \left|\int_{R^n} f\right| \\ &= 4^n \left|\int_{R_n} \big(f(z) - \underbrace{f(w_0)}_{=0} - \underbrace{(z-w)f'(w_0)}_{=0}\big)\right|\end{aligned}$$

wegen Satz 7.2

$$\begin{aligned}&\leq 4^n \cdot \text{Länge}(R_n) \cdot \varepsilon \cdot \frac{P}{2^n} \\ &= 4^n \cdot \varepsilon \cdot \frac{P^2}{4^n} \\ &= \varepsilon P^2 \to 0\end{aligned}$$

1	2	3	
4	R'	5	
6	7	8	$\omega \in R'$

Fig. 8: Siehe Beweis zu Korollar 7.7

Das heisst, die Tatsache das man die Funktion im Punkt w_0 ableiten kann, ist eine infinitesimale Version des Satzes von Cauchy. Er reduziert den Satz auf die Differenzierbarkeit selbst.

Bemerkung Der Satz 7.4 ist ein Spezialfall des Satzes von Stokes.

Korollar 7.7 Korollar 7.6 gilt auch, wenn f in einem w innerhalb R f nur stetig ist.

Beweis

$$\int_R f = \int_1 f + \int_2 f + \cdots + \int_8 f + \int_{R'} f$$

wegen Korollar 7.6

$$= \int_{R'}$$

Für dessen Betrag gilt

$$\left| \int_{R'} f \right| \leq \max |f| \text{ auf und innerhalb } \cdot R \cdot \underbrace{\text{Länge } R}_{:=4\varepsilon}$$

Was beliebig klein wird

Definition 7.8 Es sei γ eine stückweise C^1 geschlossene Kurve und $a \in C^1$, $a \notin \gamma$. Die Umlaufzahl von γ um a bezeichnet man mit $\eta(\gamma, \alpha)$, man berechnet sie wie folgt:

$$\eta(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a}$$

$\eta(\gamma, \alpha) \in \mathbb{Z}$.

Satz 7.9 (Integralformel von Cauchy) Sei A konvexes Gebiet, f eine holomorphe Funktion $f : A \mapsto \mathbb{C}$ und γ eine geschlossene, stückweise C^1 Kurve in A. Sei $a \in A$ aber $a \notin \gamma$

$$f(a) \cdot \eta(\gamma, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} \mathrm{d}z$$

Das heisst, alle Punkte innerhalb γ werden von den Randpunkten beeinflusst.

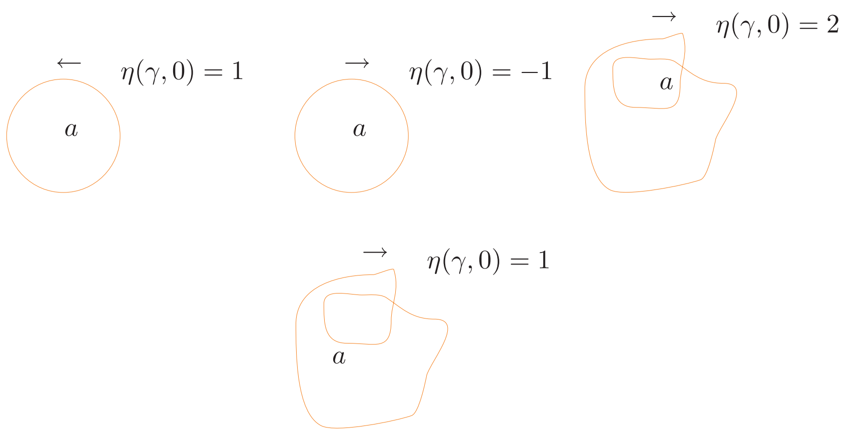


Fig. 9: Die Umlaufzahl für einige Beispiele

Allgemeiner gilt

$$\underbrace{f^*(a)}_{\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}} \cdot \eta(\gamma, \alpha) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} \mathrm{d}z$$

Beweis Man definiert eine Funktion für $z \in A$

$$g(z) = \begin{cases} f'(a) & \text{wenn } z = a \\ \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{sonst} \end{cases}$$

g ist stetig in A und analytisch $A \backslash \{a\}$. Wegen (7.4) gilt

$$\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z = 0$$
$$= \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a} - \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}$$

Weshalb

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} = 2\pi i \cdot f(a) \cdot \eta(\gamma, \alpha)$$

Zusammenfassung

39. Der Satz von Chauchy I sagt, dass jede analytische Funktion (lokal) eine Stammfunktion besitzt.

40. Für ein komplexes Linienintegral gilt

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

41. Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : A \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wenn es ein $F : A \to \mathbb{C}$ gibt, so dass $F' = f(z)$, dann gilt für jede Kurve $\gamma : [a, b] \to A$

$$\int_\gamma f = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

Insbesondere ist

$$\int_\gamma f = 0$$

wenn γ geschlossen ist. F heisst Stammfunktion von f, sie ist nur bis auf eine Konstante bestimmt.

42. Sei $f : A \to \mathbb{C}$ stetig und A ein Gebiet, wenn $\int_\gamma f 0$ für alle geschlossenen Kurven $\gamma \subseteq A$, dann ist

$$F(z) = \int_{z_0 \to z} f$$

eine Stammfunktion von f.

43. Ein Gebiet A heisst konvex, wenn für Punkte z_0 und $z_1 \in A$ die Punkte

$$\varepsilon z_0 + (1 - \varepsilon) z_1 \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, 1)$$

auch in A liegen.

44. Es sei γ eine stückweise C^1 geschlossene Kurve und $a \in C^1$, $a \notin \gamma$. Die Umlaufzahl von γ um a bezeichnet man mit $\eta(\gamma, \alpha)$, man berechnet sie wie folgt:

$$\eta(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a}$$

$\eta(\gamma, \alpha) \in \mathbb{Z}$.

45. Sei A konvexes Gebiet, f eine holomorphe Funktion $f : A \mapsto \mathbb{C}$ und γ eine geschlossene, stückweise C^1 Kurve in A. Sei $a \in A$ aber $a \notin \gamma$. Der Integralsatz von Cauchy lautet dann

$$f(a) \cdot \eta(\gamma, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} \mathrm{d}z$$

8 ANWENDUNG DER INTEGRALFORMEL

[V9-300402] Sei A ein konvexes, abgeschlossenes Gebiet und $f : A \mapsto \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, sowie $\gamma : [a, b] \mapsto A$ eine Kurve*.

Satz 8.1 Die Funktion f ist unendlich oft komplex differenzierbar und

$$\eta(\gamma, \zeta) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta \qquad z \in A, z \notin \gamma$$

Beweis Da

$$\eta(\gamma, \zeta) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} \mathrm{d}\zeta$$

können wir die Leibnitzsche Regel anwenden *(ohne Beweis)*. Wir leiten beide Seiten nach z ab

$$\big(\eta(\gamma(z)) f(z)\big)' = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta$$

Und iterativ für jedes $k > 0$

Bemerkung Ein solcher Satz gilt nicht im Reellen

Beispiel 8.I $|t|^{3/2}$ ist reell differenzierbar, aber die zweite Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}^2 |t|^{3/2}}{\mathrm{d}t^2}$$

gibt es nicht.

Wegen Satz 8.1, 7.2 und 7.4 gilt

Satz 8.2 (Hebbarkeitsatz) Sei A ein Gebiet und $f : A \mapsto \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wenn $f : A \backslash \{0\} \mapsto \mathbb{C}$ holomorph ist, dann ist f in ganz A holomorph.

Beispiel 8.II Die Funktion

$$\frac{e^z - 1}{\cos z - 1 + 2}$$

ist stetig in 0, denn der Limes existiert und lässt sich zu einer holomorphen Fuktion in einer Umgebung von 0 ausdehnen.

Notation $\rho > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$

$$D_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} |\, |z - z_0| < \rho\}$$
$$\overline{D}_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} |\, |z - z_0| \le \rho\}$$

* gemeint ist immer: stückweise C^1

Satz 8.3 Sei A ein Gebiet und $f : A \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $a \subset A$

$D_\rho(a) \subset A$ $\rho > 0$

Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$$

heisst Taylorreihe und konvergiert in $D_\rho(a)$ und hat den Wert $f(z)$.

Bemerkung f ist in $D_\rho(a)$ vollständig durch $f(a)$, $f^{(1)}(a)$ bestimmt.

Beweis

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

wobei γ der Rand des Kreises mit Radius ρ um a ist

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}$$

geometrische Reihe

$$= \frac{1}{\zeta - a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k$$

Wenn $|z| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

[V10-020502]

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_\gamma \left(\frac{f(\zeta)(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}\right)\mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

Aus uniformer Konvergenz auf γ

$$\int_\gamma \left(\frac{f(\zeta)(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}\right)\mathrm{d}\zeta = \frac{(z-a)^k}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta$$

Wegen Satz 8.1

$$\begin{aligned} &= \frac{(z-a)^k}{2\pi i}\cdot\frac{f^{(k)}(a)2\pi i}{k!} \\ &= \frac{(z-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) \end{aligned}$$

Nun werden wir allgemeine Sätze über Potenzreihen formulieren, da jede holomorphe Funktion als Potenzreihe geschrieben werden kann.

Sätze und Definitionen über Potenzreihen

Definition 8.4 Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $a_0, a_1, \cdots \in \mathbb{C}$. Die grösste reelle Zahl R, so dass die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (*)$$

konvergiert $\forall\, z \in D_R(z_0)$ heisst *Konvergenzradius* von $(*)$

Satz 8.5 *Selbe Notation* $\forall\, z \in D_R(z_0)$ ist die Funktion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

holomorph, und weiter

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$

Ist man ausserhalb der Kreisscheibe, so divergiert die Potenzreihe immer, auf dem Rand können komische Sachen passieren. Das heisst

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

divergiert, wenn man von der Kreisschreibe weg geht $|z - z_0| > R$, *ohne Beweis, vergleiche mit Satz 5.3*. Ausserdem gilt die folgende Eindeutigkeitsaussage.

Satz 8.6 Wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

In einer offenen Kreisscheibe um z_0, dann gilt $a_k = b_k \ \forall\, k \geq 0$.

Beweis Aus Satz 8.3

Formeln für den Konvergenzradius

a) Wenn

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

existiert, dann ist λ der Konvergenzradius von

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \star$$

b) Wenn

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

existiert, dann ist $\frac{1}{\rho}$ der Konvergenzradius von $\star$.

Beispiel 8.III $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} \\ &= \lim_{k\to\infty} k + 1 = \infty\end{aligned}$$

c) Aus Satz 8.3 folgt *(Notation wie in (8.3))* Der Konvergenzradius von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$$

ist ρ.

Beispiel 8.IV

- Die geometrische Reihe $f(z) = 1 + z + z^2 + \dots$ hat den Konvergenzradius 1 wenn $zf(z) = 1 + f(z)$.
  $\Leftrightarrow (z-1)f(z) = 1$
  $\Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{z-1}$
- Taylorreihe von $\frac{1}{4+z^2}$ um 0.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4+z^2} &= \frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{z}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{iz}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4}\left[1 + \left(\frac{iz}{2}\right)^2 + \left(\frac{iz}{2}\right)^4 + \cdots\right] \\ &= 1 - \frac{z^2}{16} + \frac{z^4}{64} \qquad (*)\end{aligned}$$

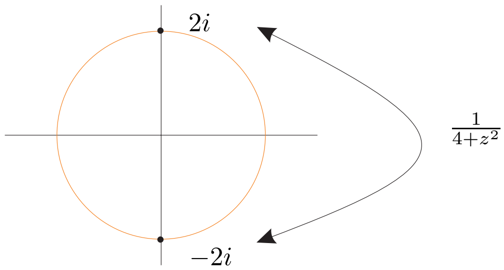
$(*)$ konvergiert wenn

$$\left|\frac{iz}{2}\right|^2 < 1 \Leftrightarrow |z|^2 < 4$$

divergiert wenn

$$\left|\frac{iz}{2}\right|^2 > 1$$

Deshalb hat $(*)$ den Konvergenzradius 2.



Dies entspricht gerade dem Abstand zwischen dem 0 Punkt und den Singularitäten.

Satz 8.7 *Siehe Übung 5, Serie 4* $f : A \mapsto \mathbb{C}$ ist holomorph im Gebiet A, $z_0 \in A$, $\rho > 0$, $\overline{D_\rho(z_0)} \subseteq A$. $\gamma =$ Kreis mit Radius ρ um z_0. Dann gilt

$$f^{(k)}(z_0) \leq \frac{k!}{\rho^k} N$$

wobei N das Maximum von $|f|$ auf γ ist.

Bemerkung Hinweis zum Beweis des Satzes 8.7: Siehe Satz 8.1.

Korollar 8.8 (Satz von Liouville) Wenn f *in ganz* $\mathbb{C}$ holomorph ist und $|f(z)| \leq M$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $M > 0$, dann ist f konstant.

Beweis Wegen (8.7)

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{\rho} M \qquad \forall\, \rho > 0$$

$\frac{1}{\rho}$ wird beliebig klein, also

$$f'(z_0) = 0 \qquad \forall\, z_0 \in \mathbb{C}$$

Das heisst, f ist konstant.

Satz 8.9 (Fundamentalsatz der Algebra) Es sei

$$P(z) = a_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_n z^n$$

dann gibt es mindestens eine Zahl $z_0 \in \mathbb{C}$, so dass $P(z_0) = 0$.

Beweis Per absurdum ist

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

in ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Wegen (8.8) erhält man einen Widerspruch, wenn man zeigen kann, dass $|f(z)|$ in $\mathbb{C}$ *beschränkt* ist.

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty} |f(z)| &= \lim_{z\to\infty} \left| \frac{1}{a_0 + \cdots + a_n z^n} \right| \\
&= \lim_{z\to\infty} \underbrace{\left| \frac{1}{z^n} \right|}_{\to 0} \cdot \left| \frac{1}{\underbrace{\frac{a_0}{z^n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{a_1}{z^{n-1}}}_{\to 0} + \cdots + a_n} \right| \\
&= 0 \cdot \frac{1}{a_n} = 0
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \forall\, \rho > 0\; \exists\, \delta > 0$ so dass $|f(z)| > \delta$ wenn $|z| > \rho$

$$|f(z)| < \max\{\varepsilon, M_0\}$$

wobei

$$M_0 = \max\{|f(z)|\,|z \in \overline{D_\rho(0)}\}$$

Widerspruch! $\square$

Satz 8.10 (von Gauss) Sei $f : A \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und A eine Gebiet, $z_0 \in A$ ein Punkt, $\rho > 0$, $D_\rho(z_0) \subset A$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$$

Beweis Cauchy: $\gamma =$ Kreis um z_0 mit Radius ρ, $\gamma(\theta) = z_0 \cdot \rho \cdot e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{z_0 + \rho e^{i\theta} - z_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} (z_0 + \rho e^{i\theta}) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} \cdot \rho i e^{i\theta} \mathrm{d}\theta \qquad \square
\end{aligned}$$

Korollar 8.11 (lokaler Satz vom Minimum) Sei $f : A \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion im Gebiet A. Wenn f in $z_0 \in A$ ein lokales Maximum hat, das heisst

$$|f(0)| \geq |f(z)|$$

für alle z in einer Umgebung von z_0, dann ist f konstant in dieser Umgebung.

Beweis Aus Hypothese gibt es ein $\rho > 0$, so dass $D_\rho(z_0) \subseteq A$ und $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ $\forall\, z \in \overline{D_\rho(z_0)}$. Man rechnet

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) \mathrm{d}\theta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + \rho e^{i\theta}) \right| \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Siehe Fig. 10

$$\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \cdot |f(z_0)|$$

Falls eine -Fläche existiert

$$\begin{aligned}
&< \frac{1}{2\pi} 2\pi \cdot |f(z_0)| \\
&= |f(z_0)|
\end{aligned}$$

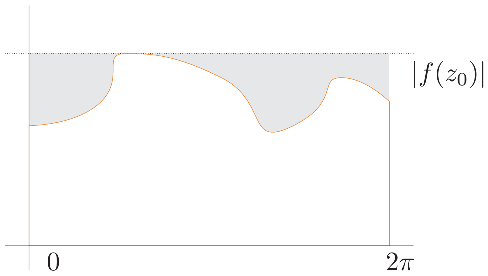


Fig. 10:

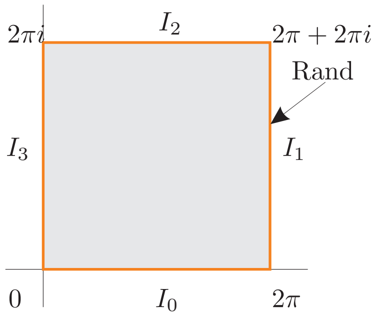


Fig. 11:

SATZ 8.12 Sei A ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$, $f : \overline{A} \to \mathbb{C}$ stetig, $f|A : A \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

a) $M = \max\left\{|f(z)|\,|z \in \overline{A}\right\} = \max\left\{|f(z)|\,|z \in \text{Rand}(A)\right\}$

b) Wenn $|f(z_0)| = M$ für ein $z_0 \in A$, dann ist f konstant in A

BEISPIEL 8.V Das Maximum von $|e^z|$ auf $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. *Siehe Fig. 11*. Wegen (8.12) gilt

$$\begin{aligned} M &= \max\{|e^z|\,|z \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\} \\ &= \max\{|e^z|\,|z \in I_0 \cup I_1 \cup I_2 \cup I_3\} \end{aligned}$$

Für I_0, I_1, I_2, I_3 gilt

$$\begin{aligned} &\max\{|e^z|\,|z \in I_0\} = e^{2\pi} \\ &\max\{|e^z|\,|z \in I_1\} = \max\left\{\left|e^{2\pi}e^{i\theta}\right|\,|\theta \in [0, 2\pi]\right\} = e^{2\pi} \\ &\max\{|e^z|\,|z \in I_2\} = \max\left\{\left|e^{\theta+2\pi i}\right|\,|\theta \in [0, 2\pi]\right\} = e^{2\pi} \\ &\max\{|e^z|\,|z \in I_3\} = \max\left\{\left|e^{i\theta}\right|\,|\theta \in [0, 2\pi]\right\} = 1 \end{aligned}$$

Also ist $\max\{|e^z|\,|z \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\} = 2\pi$

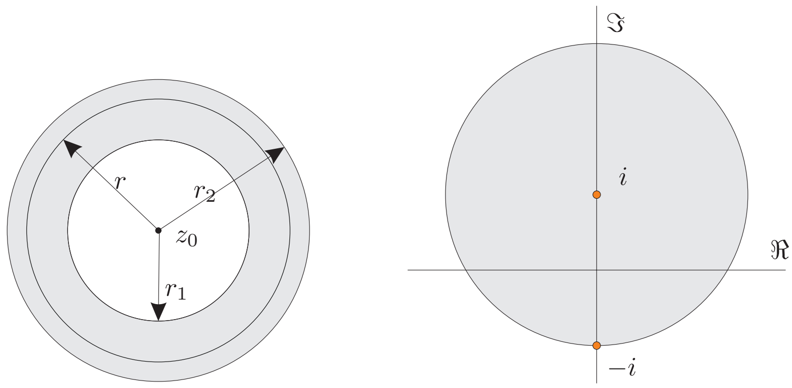


Fig. 12: Laurent Entwicklung, Beispiel 8.VI

8.3 lässt sich verallgemeinern zu

SATZ 8.13 (LAURENT ENTWICKLUNG) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r_1 < r_2$ und

$$A = \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

Siehe Fig. 12 a) Wenn $f : A \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^{-k}$$

Wenn $z \in A$, wobei

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta$$
$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z_0)^{k-1} \mathrm{d}\zeta$$

Weiter sind die $a_0, a_1, \ldots$ und $b_0, b_1, \ldots$ eindeutig bestimmt.

BEWEIS *Ähnlich wie (8.3)*

BEISPIEL 8.VI a) Die Funktion

$$f(z) = \frac{z+1}{z}$$

ist holomorph in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ für $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$, $z_0 = 0$ ist die Laurentreihe von $f(z)$

$$1 + \frac{1}{z}$$

Also $a_0 = 1$, $a_k = 0 \; \forall \, k > 0$, $b_1 = 1$, $b_k = 0 \; \forall \, k > 1$

b) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+1}\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4i}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{2i}\right)}\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4i}\left[1 - \frac{z-i}{2i} - \frac{(z-i)^2}{4} - \dots\right]\\
&= \frac{1}{2}(z-1)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{k-1}2^{-k-2}(z-i)^k
\end{aligned}$$

also $z_0 = i$, $r_1 = 0$, $r_2 = 2$, und

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{2} &&\\
b_k &= 0 && \forall\, k > 1\\
a_k &= i^{k-1}z^{k-2} && \forall\, k > 0
\end{aligned}$$

Notation Sei A ein Gebiet, $z_0 \in A$, $f : A\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $\rho > 0$ $D_\rho(z_0) \subseteq A$. Wegen (8.13) gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z-z_0)^{-k}$$

- Wenn $b_k = 0\ \forall\, k \geq 1$ und $a_0, a_1, \dots, a_n = 0$, $a_{n+1} \neq 0$, dann hat f in z_0 eine *Nullstelle* der Ordnung n

  Beispiel 8.VII z hat eine Nullstelle der Ordnung 1 in 0, z^4 hat eine Nullstelle der Ordnung 4 in 0, usw.

- Wenn $b_k = 0\ \forall\, k > n$, dann hat f eine *Polstelle* der Ordnung $n+1$ in z_0

  Beispiel 8.VIII $\frac{1}{z}$ hat eine Polstelle der Ordnung 1 in 0, $\frac{1}{z^2}$ hat eine Polstelle der Ordnung 2 in 0, usw.

- Wenn es kein $k_0 > 1$ gibt so dass $b_k = 0\ \forall\, k > k_0$, dann hat f eine *wesentliche Singularität* in z_0
- Das *Residuum* $\mathrm{Res}(f, z_0)$ in z_0 ist die Zahl b_1.
- Wenn $b_k = 0\ \forall\, k \geq 1$, dann ist z_0 eine *hebbare Singularität*.

Isolierte Singularität .[V12-160502]† Sei a ein Punkt im Gebiet Ω, $\dot\Omega := \Omega\backslash\{a\}$ und $f : \dot\Omega \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Dann ist a ist eine isolierte Singularität von f.

† Diese Vorlesung wurde von Todor gehalten, weshalb die Notationen von denen Rössleres abweichen können. Insbesondere wurde die Aufteilung in Koeffizienten a_n und b_n für positive bzw. negative Exponenten in der Laurent Entwicklung nicht vorgenommen. Die a_n entsprechen den b_{n-1} für $n < 0$

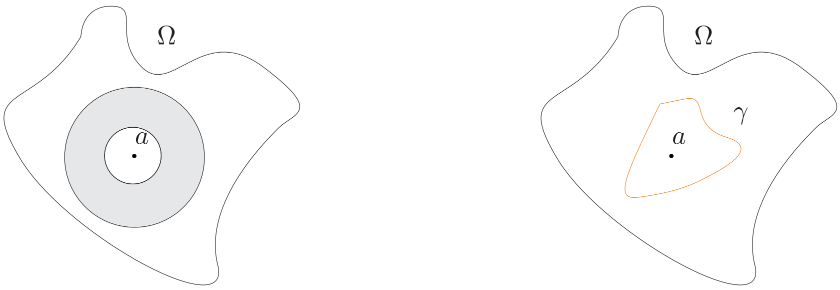


Fig. 13: Konvergenzbereich der Laurent Entwicklung und Residuum

Beispiel 8.IX Sei

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

$\Omega = \mathbb{C}$. Die Laurent Entwicklung von a herum ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Diese Summe konvergiert ausserhalb einer Scheibe um a

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{z-a} = (z-a)^{-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \end{aligned}$$

Das heisst

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = -1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für das *Residuum* von f in a gilt $\operatorname{Res}(f|a) := a_{-1}$

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f|a) = 2\pi i \cdot a_{-1}$$

$$f(z) = \frac{1}{z-a} \Rightarrow \operatorname{Res}(f|a) = 1$$

Sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

wir unterscheiden drei Fälle:

1. Falls $a_n = 0$ für $n < 0$, dann heisst a *hebbare Singularität*. Es gilt $\operatorname{Res}(f|a) = 0$, $\forall\, f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \\ &= a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots \\ \Rightarrow f(0) &= a_0 \end{aligned}$$

Daraus folgt, f kann auf ganz Ω definiert werden, wir setzen f wie folgt in den Punkt a fort:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega \backslash \{a\} \\ a_0, & z = a \end{cases}$$

Beispiel 8.X Die *Sincfunktion* ist definiert durch $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

$a = 0$ ist eine Singularität

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \\ \frac{\sin z}{z} &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots \end{aligned}$$

Wenn wir $\frac{\sin z}{z}$ fortsetzten in der Umgebung 0 erhalten wir

$$\left.\frac{\sin z}{z}\right|_{z=0} = 1$$

Das heisst

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

somit ist $a = 0$ eine hebbare Singularität.

2. Falls $a_n = 0$ für $n \leq -m$, wobei m eine feste positive Zahl ist $m > 0$. Dann heisst a *Pol!der Ordnung* m. Die entsprechende Laurent Entwicklung sieht wie folgt aus

$$f(z) = a_{-m}(z-a)^{-m} + a_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \ldots$$

$a_{-10}, a_{-9}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ sind die Koeffizienten.

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{-m+1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

In unserem Beispiel

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

ist $m = 1$, das heisst, es liegt ein vor. Wenn

$$f(z) = \frac{g}{h} \begin{cases} g(a) \neq 0 \\ h(a) = 0, h'(a) \neq 0 \end{cases}$$

folgt, a ist ein einfacher Pol von f.

Beispiel 8.XI Sei

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

Also $g(z) = z$ und $h(z) = z^2 + 1$

$$\left.\begin{aligned} g(i) = i \neq 0 \\ h(i) = i^2 + 1 = 0 \\ h'(i) = 2i \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = i \text{ ist ein einfacher Pol von } f$$

Für das Residuum gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f|a) &= \frac{g(a)}{h'a} \\ &= \frac{i}{2i} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Es sei

$$f = \frac{g}{h}$$

wobei

- a Nullstelle $k-$ter Ordnung von g
- a Nullstelle $k+1-$ter Ordnung von h.

Daraus folgt, a ist einfacher Pol von f. a Nullstelle $k-$ter Ordnung von g bedeutet, $g(a) = 0$, $g'(a) = 0$, $g^{k-1}(a) = 0$. Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\operatorname{Res}(f|a) = (k+1)\frac{g^{(k)}(a)}{h^{(k+1)}(a)}$$

Beispiel 8.XII

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3}$$

$a = 0$, daraus folgt

$$\operatorname{Res}(f|a) = 3\frac{\cos 0}{6} = \frac{1}{2}$$

denn wir haben eine Funktion $f = \frac{g}{h}$. Dabei gilt

$$g(z) = 1 - \cos z \qquad\qquad h(z) = z^3$$

und

$$\begin{array}{llllllllll} g(0) & = & 0 & g'(0) & = & 0 & g''(0) & \neq & 0 \\ h(0) & = & 0 & h'(0) & = & 0 & h''(0) & = & 0 & h'''(0) & \neq & 0 \end{array}$$

daraus folgt, $a = 0$ ist Pol 2−ter Ordnung von f. Falls

$$\begin{array}{llllllll} g(a) & \neq & 0 \\ h(a) & = & 0 & h'(a) & = & 0 & h''(a) & \neq & 0 \end{array}$$

dann gilt:

$$\mathrm{Res}(f|a) = 2 \cdot \frac{g'(a)}{h''(a)} - \frac{2}{3}\frac{g(a)h'''(a)}{(h''(a))^2}$$

Beispiel 8.XIII

$$f(z) = \frac{z+1}{(z^2+2)^2} \qquad\qquad a = \sqrt{2}i$$

also ist $a = \pm\sqrt{2}i$ und damit

$$\mathrm{Res}(f|a) = 2\frac{1}{-16} - \frac{2}{3}\frac{(\sqrt{2}i+1)24\sqrt{2}i}{16^2}$$

3. Wesentliche Singularität:

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ kein Pol von } f \\ a \text{ keine hebbare Singularität} \end{array}\right\} a \text{ wesentliche Singularität von } f$$

Beispiel 8.XIV

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k$$

Um das Residuum in 0 zu rechnen, bestimmt man die Laurentreihe. Offensichtlich ist $a_{-1} = 1$, also $\mathrm{Res}(f, 0) = 1$.

Zusammenfassung

46. Die Funktion f ist unendlich oft komplex differenzierbar und

$$\eta(\gamma, \zeta) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta \qquad\qquad z \in A, z \notin \gamma$$

47. Sei A ein Gebiet und $f : A \mapsto \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wenn $f : A \backslash \{0\} \mapsto \mathbb{C}$ holomorph ist, dann ist f in ganz A holomorph.

48. $\rho > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$

$$D_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | \, |z - z_0| < \rho\}$$
$$\overline{D}_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | \, |z - z_0| \leq \rho\}$$

49. Sei A ein Gebiet und $f : A \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $a \subset A$

$$D_\rho(a) \subset A \qquad \rho > 0$$

Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$$

heisst Taylorreihe und konvergiert in $D_\rho(a)$ und hat den Wert $f(z)$.

50. Wenn

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

existiert, dann ist λ der Konvergenzradius von

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \star$$

51. Wenn

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

existiert, dann ist $\frac{1}{\rho}$ der Konvergenzradius von

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \star$$

52. Der Satz von Liouville lautet, wenn f in ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist und $|f(z)| \leq M$, $\forall \, z \in \mathbb{C}$, $M > 0$, dann ist f konstant.

53. Der Fundamentalsatz der Algebra lautet: Wenn

$$P(z) = a_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_n z^n$$

dann gibt es mindestens eine Zahl $z_0 \in \mathbb{C}$, so dass $P(z_0) = 0$.

54. Der Satz von Gauss lautet: Sei $f : A \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und A eine Gebiet, $z_0 \in A$ ein Punkt, $\rho > 0$, $D_\rho(z_0) \subset A$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$$

55. Sei $f : A \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion im Gebiet A. Wenn f in $z_0 \in A$ ein lokales Maximum hat, das heisst

$$|f(0)| \geq |f(z)|$$

für alle z in einer Umgebung von z_0, dann ist f konstant in dieser Umgebung.

56. Sei A ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$, $f : \overline{A} \to \mathbb{C}$ stetig, $f|A : A \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

a) $M = \max\left\{|f(z)|\,|z \in \overline{A}\right\} = \max\left\{|f(z)|\,|z \in \mathrm{Rand}(A)\right\}$

b) Wenn $|f(z_0)| = M$ für ein $z_0 \in A$, dann ist f konstant in A

57. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r_1 < r_2$ und $A = \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Wenn $f : A \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^{-k}$$

Wenn $z \in A$, wobei

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta$$
$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z_0)^{k-1} \mathrm{d}\zeta$$

Weiter sind die $a_0, a_1, \ldots$ und $b_0, b_1, \ldots$ eindeutig bestimmt.

58. Sei A ein Gebiet, $z_0 \in A$, $f : A \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $\rho > 0$ $D_\rho(z_0) \subseteq A$. Wegen (8.13) gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^{-k}$$

- Wenn $b_k = 0 \ \forall\ k \geq 1$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n = 0$, $a_{n+1} \neq 0$, dann hat f in z_0 eine *Nullstelle* der Ordnung n
- Wenn $b_k = 0 \ \forall\ k > n$, dann hat f eine *Polstelle* der Ordnung $n + 1$ in z_0
- Wenn es kein $k_0 > 1$ gibt so dass $b_k = 0 \ \forall\ k > k_0$, dann hat f eine *wesentliche Singularität* in z_0
- Das *Residuum* $\mathrm{Res}(f, z_0)$ in z_0 ist die Zahl b_1.

- Wenn $b_k = 0 \; \forall \; k \geq 1$, dann ist z_0 eine hebbare Singularität.

59. Sei a ein Punkt im Gebiet Ω, $\dot{\Omega} := \Omega \backslash \{a\}$ und $f : \dot{\Omega} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Dann ist a ist eine isolierte Singularität von f.

60. Es sei $f = \frac{g}{h}$ wobei

- a Nullstelle $k-$ter Ordnung von g
- a Nullstelle $k+1-$ter Ordnung von h.

Daraus folgt, a ist einfacher Pol von f. a. Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\text{Res}(f|a) = (k+1)\frac{g^{(k)}(a)}{h^{(k+1)}(a)}$$

61. Falls

$$\begin{array}{lllllllll} g(a) & \neq & 0 & & & & & & \\ h(a) & = & 0 & h'(a) & = & 0 & h''(a) & \neq & 0 \end{array}$$

dann gilt:

$$\text{Res}(f|a) = 2 \cdot \frac{g'(a)}{h''(a)} - \frac{2}{3}\frac{g(a)h'''(a)}{(h''(a))^2}$$

9 DIE ALLGEMEINE INTEGRALFORMEL

[V13-210502] Die verallgemeinerte Cauchy Integralformel ist ähnlich wie die bereits Gesehene, erlaubt aber auch die Integration durch komplexe Gebiete.

Der Residuensatz

Definition 9.1 Sei A ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $\gamma : [a,b] \to A$ eine Kurve. γ heisst *nullhomolog*, wenn

$$\eta(\gamma, z) = 0 \qquad\qquad \forall \; z \in \mathbb{C}\backslash\{A\}$$

Wobei $\eta(\gamma, z)$ die Umlaufzahl von γ um z bedeutet. Eine nullhomologe Kurve in A ist also *zusammenziehbar*, ohne dass sie aus A kommt.

Definition 9.2 Ein *Zyklus* in A ist eine formale Linearkombination

$$n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \cdots + n_k\gamma_k$$

wobei $n_1, \ldots, n_k$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ abgeschlossene Kurven in A sind.

(a) γ_1 ist nicht nullhomolog in A, γ_2 ist nullhomolog

(b) $\gamma_1 - \gamma_2$ ist nullhomolog

Fig. 14: Bedeutung von nullhomolog

Man definiert

$$\eta(n_1\gamma_1 + \cdots + n_k\gamma_k, z) = \sum_{i=1}^{k} n_i \eta(\gamma_1, z)$$

analog ist $n_1\gamma_1 + \cdots + n_k\gamma_k$ nullhomolog in A, wenn

$$\eta(n_1\gamma_1 + \cdots + n_k\gamma_k, z) = 0 \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\{A\}$$

Weiter gilt

$$\int_{n_1\gamma_1+\cdots+n_k\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{k} n_i \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Satz 9.3 (Integralformel) Sei Γ ein nullhomologer Zyklus in einem Gebiet A. Dann gilt

a) $\int_\Gamma f = 0$

b) und

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}}\,\mathrm{d}\xi = \eta(\Gamma, a) f^{(k)}(a)$$

wobei $a \in A$, $a \notin \Gamma$

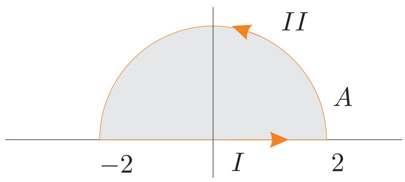
Bemerkung Wenn A konvex ist, sind *alle* Zyklen nullhomolog.

Beispiel 9.I Nach (9.3a) gilt $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ für Fig. 9 b)

Satz 9.4 (Der Residuensatz) Sei A ein Gebiet, $z_1, \ldots, z_k \in A$ die Singularitäten, $f : A\backslash\{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und Γ ein nullhomologer Zyklus wobei $z_1, \ldots, z_k \notin \Gamma$. Dann gilt

$$\int_\Gamma f\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j) \cdot \eta(\Gamma, z_j)$$

Diese Beziehung verallgemeinert Satz 9.3 a) und b).



Beweis (von 9.3 und 9.4) Wird ähnlich geführt wie der Beweis von Cauchy für konvexe Gebiete

Beispiel 9.II Sei γ ein Kreis mit Radius 1 um den Punkt 1 und

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \cdots + \frac{1}{(z-1)^n}$$

dann erhalten wir mit der Integralformel (9.3)

$$\begin{aligned}\int_\gamma &= \sum_{j=1}^{k} \frac{2\pi i}{(j-1)!} \frac{\mathrm{d}^{j-1}(1)}{\mathrm{d}z^{j-1}} \\ &= \frac{2\pi i}{0!} = 2\pi i\end{aligned}$$

und mit dem Residuensatz (9.4)

$$= 2\pi i \sum \{\text{Residuum von } f \text{ in } D(1)\} = 2\pi i \cdot 1$$

Bemerkung [V14-230502] Auf Anfrage eines Zuhörers

$$\begin{aligned}\lim \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| &= \lambda \\ \lim \sqrt[k]{|a_k|} &= \rho\end{aligned}$$

Für den Konvergenzradius gilt

$$\lambda = \frac{1}{\rho} = \text{Konvergenzradius}$$

Erste Anwendung der Residuenformel Was ist das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

Wir setzen

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1}$$

Die Reihenentwicklung liefert

$$(z^4+1) = \left(z - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(z - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(z - e^{\frac{5i\pi}{4}}\right)\left(z - e^{\frac{7i\pi}{4}}\right)$$

Aus dem Residuensatz folgt, siehe Fig.

$$\int_I f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{II} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \cdot \left(\mathrm{Res}\left(f, e^{\frac{i\pi}{4}}\right) + \mathrm{Res}\left(f, e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\right)$$

Für das erste Residuum gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(f, e^{\frac{i\pi}{4}}\right) &= \lim_{z\to e^{i\pi/4}} \frac{z - e^{i\pi/4}}{z^4+1} \\
&= \frac{1}{4e^{3i\pi/4}} \\
&= \frac{1}{(e^{i\pi/4} - e^{3i\pi/4})(e^{i\pi/4} - e^{5i\pi/4})(e^{i\pi/4} - e^{7i\pi/4})}
\end{aligned}$$

und für das Zweite

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(f, e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) &= \frac{1}{4e^{9i\pi/4}} \\
&= \frac{2\pi i}{4}\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}} - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{\pi i}{2} 2i\Im\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) \\
&= -\pi \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \\
&= -\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

weiter ist

$$\left|\int_{II} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \pi r \max\left(|f(z)|\right)$$

$$\left|\frac{1}{z^4+1}\right| \le \frac{1}{|z|^4 - 1} \le \frac{\frac{1}{2}}{|z|^4}$$

wenn $z \in II$ und $r > 2$ ist

$$\pi r \max\left(|f(z)|\right) \le \pi r \frac{\frac{1}{2}}{r^4} = \frac{\pi}{2r^3} \to 0$$

wenn $r \to \infty$ $\square$

SATZ 9.5 Es sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion, so dass $R(\cos\theta, \sin\theta) \neq 0 \ \forall\ \theta \in R$. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i \sum \{\text{Residuum von } f(z) \text{ in } D_1(0)\}$$

wobei

$$f(z) = \frac{R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}{iz}$$

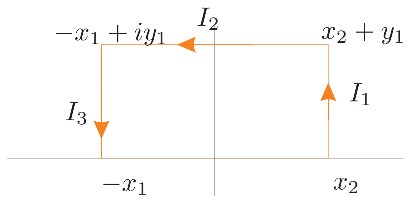


Fig. 15: Alle Singularitäten von $f(z)e^{i\omega z}$ liegt im Rechteck

Beweis Aus dem Residuensatz folgt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum\{\text{Residuum von } f(z) \text{ in } D_1(0)\}$$

wobei $\gamma =$ Einheitskreis.

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R(\cos\theta, \sin\theta)}{ie^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Beispiel 9.III $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \,?\; R(x,y) = x^2$

$$2\pi i \sum\left\{\text{ Residuum von } \frac{R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}{iz} \text{ in } D_1(0)\right\}$$

wobei

$$\begin{aligned}\frac{R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}{iz} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2}{iz} \\ &= \frac{1}{4i}\left[\frac{z^2+2z\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}}{z}\right] \\ &= \frac{1}{4i}\left[z+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^3}\right]\end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{2i}$ und damit

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

Fourier Integrale Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet $\{z | \Im(z) > 0\} \subseteq A$, $f : A \backslash \{z_0, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion so dass $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. $z_0, \ldots, z_m \notin \mathbb{R}$ dann gilt

Satz 9.6 Es sei $\omega > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum\{\text{ Residuum von } e^{i\omega x} f(z) \text{ in } \{z | \Im(z) > 0\}$$

Beweis Wir wählen den Weg in Fig. 15

$$\int_{I_1} e^{i\omega z} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{y_1} e^{i\omega(x_2+it)} f(x_2+it)i\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$\int_{I_2} e^{i\omega z} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{x_2}^{-x_1} e^{i\omega(t+iy_1)} f(iy_1+t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$\int_{I_3} e^{i\omega z} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{y_1}^{0} e^{i\omega(-x_1+it)} f(-x_1+it)i\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

Fall (1)

$$\left|e^{i\omega(x_2+it)i} f(x_2+it)\right| = \left|e^{-\omega t} f(x_2+it)i\right| \leq |f(x_2+it)| \qquad t\in[0,y_1]$$

Fall (2)

$$\left|e^{i\omega(t+iy_1)} f(iy_1+t)\right| = \left|e^{-\omega y_1} f(iy_1+t)\right| \leq |f(iy_1+t)| \qquad t\in[-x_1,x_2]$$

Fall(3)

$$\left|e^{i\omega(-x_1+it)} f(-x_1+it)i\right| = \left|e^{-\omega x} f(-x_1+it)i\right| \leq |f(-x_1+it)| \quad t\in[0,x_2]$$

Man wählt x_1, x_2, y_1 so gross dass

$$\begin{aligned} |f(x_2+it)| &< \varepsilon & \forall\, t &\in [0,y_1]\\ |f(-x_1+it)| &< \varepsilon & \forall\, t &\in [0,y_1]\\ |f(iy_1+t)| &< \varepsilon & \forall\, t &\in [-x_1,x_2] \end{aligned}$$

damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\int_{I_1} f(z)e^{i\omega z}\,\mathrm{d}z\right| &\leq \int_0^{y_1} \left|e^{i\omega(x_2+it)} f(x_2+it)i\right|\,\mathrm{d}t\\ &\leq \varepsilon\cdot\int_0^{y_1}\left|e^{i\omega(x_2+it)}\cdot i\right|\,\mathrm{d}t\\ &= \varepsilon\int_0^{y_1} e^{-\omega t}\,\mathrm{d}t\\ &= \varepsilon\left[-\frac{1}{\omega}e^{-\omega t}\right]_0^{y_1}\\ &= \left(-\frac{1}{\omega}e^{\omega y_1}+\frac{1}{\omega}\right)\varepsilon\\ &\leq \frac{\varepsilon}{\omega}\end{aligned}$$

analog dazu

$$\left|\int_{I_3} f(z)e^{i\omega z}\mathrm{d}z\right| < \frac{\varepsilon}{\omega}$$

Nach Lemma

$$\left|\int_{I_2} f(z)e^{i\omega z}\mathrm{d}z\right| < \varepsilon e^{-\omega y_1} \underbrace{(x_1+x_2)}_{\text{Länge von } I_2}$$

Der rechte Teil der Beziehung wird beliebig klein, daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x)\mathrm{d}x &= \int f(z)e^{i\omega z}\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i \sum \{ \text{ Residuum von } f(z)e^{i\omega z} \text{ in } \{z|\Im(z) > 0\}\}\end{aligned}$$

Beispiel 9.IV [V15-280502]

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t^2+b^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(t)}{t^2+b^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\cdot\Re\int_{-\infty}^\infty e^{it}\frac{1}{t^2+b^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi i\sum\left\{\text{Res von } \frac{e^{iz}}{z^2+b^2} \text{ in } \{z|\Im(z)>0\}\right\}\end{aligned}$$

$-ib$ und ib sind Polstellen von $\frac{e^{iz}}{z^2+b^2}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, $b > 0$ und erhalten

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+b^2}, ib\right) &= \frac{e^{i(ib)}}{2ib} \\ &= \frac{e^{-b}}{2ib}\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t^2+b^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\cdot\Re\left(2\pi i\cdot\frac{e^{-b}}{2b}\right) \\ &= \frac{\pi e^{-b}}{2ib}\end{aligned}$$

Satz 9.7 Seien $P(z)$ und $Q(z)$, $Q(x) \neq 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$ zwei Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ und $\deg(Q) \geq 2 + \deg(P)$[‡] dann ist

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\cdot\sum\left\{\text{Res von } \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ in } \{z\in\mathbb{C}|\Im(z)>0\}\right\}$$

Satz 9.8 (Verallgemeinerung) Sei f eine analytische Funktion in $\mathbb{C}$ bis auf die Polstellen $\{z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\}$ und

$$M > 0 : |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$$

wenn $z \to \infty$. Unter dieser Bedingung gilt

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi i\cdot\sum\{\text{Res von } f(z) \text{ in } \{z|\Im(z)>0\}\}$$

[‡] deg = Grad

Zusammenfassung

62. Sei A ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $\gamma : [a, b] \to A$ eine Kurve. γ heisst nullhomolog, wenn

$$\eta(\gamma, z) = 0 \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \backslash \{A\}$$

Wobei $\eta(\gamma, z)$ die Umlaufzahl von γ um z bedeutet. Eine nullhomologe Kurve in A ist also zusammenziehbar, ohne dass sie aus A kommt.

63. Ein Zyklus in A ist eine formale Linearkombination

$$n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \cdots + n_k\gamma_k$$

wobei $n_1, \ldots, n_k$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ abgeschlossene Kurven in A sind.

64. $n_1\gamma_1 + \cdots + n_k\gamma_k$ ist nullhomolog in A, wenn

$$\eta(n_1\gamma_1 + \cdots + n_k\gamma_k, z) = 0 \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \backslash \{A\}$$

65. Es gilt

$$\int_{n_1\gamma_1+\cdots+n_k\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{k} n_i \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$

66. Sei Γ ein nullhomologer Zyklus in einem Gebiet A. Dann gilt

a) $\int_\Gamma f = 0$

b) und

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}}\,\mathrm{d}\xi = \eta(\Gamma, a) f^{(k)}(a)$$

wobei $a \in A$, $a \notin \Gamma$

67. Der Residuensatz lautet: Sei A ein Gebiet, $z_1, \ldots, z_k \in A$ die Singularitäten, $f : A \backslash \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und Γ ein nullhomologer Zyklus wobei $z_1, \ldots, z_k \notin \Gamma$. Dann gilt

$$\int_\Gamma f\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j) \cdot \eta(\Gamma, z_j)$$

68. Es sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion, so dass $R(\cos\theta, \sin\theta) \neq 0\ \forall\, \theta \in R$. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i \sum \{\text{Residuum von } f(z) \text{ in } D_1(0)\}$$

wobei

$$f(z) = \frac{R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}{iz}$$

69. Für $\omega > 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum \{ \text{ Residuum von } e^{i\omega x} f(z) \text{ in } \{z|\Im(z) > 0\}$$

70. eien $P(z)$ und $Q(z)$, $Q(x) \neq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ zwei Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ und $\deg(Q) \geq 2 + \deg(P)$, dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \cdot \sum \left\{ \text{Res von } \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ in } \{z \in \mathbb{C}|\Im(z) > 0\} \right\}$$

71. Sei f eine analytische Funktion in $\mathbb{C}$ bis auf die Polstellen $\{z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\}$ und

$$M > 0 : |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$$

wenn $z \to \infty$. Unter dieser Bedingung gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi i \cdot \sum \{\text{Res von } f(z) \text{ in } \{z|\Im(z) > 0\}\}$$

10 FOURIERREIHEN

Fourierreihen geben eine Methode, um periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zu approximieren. Man fängt mit der 2π-periodischen Funktion $t \mapsto e^{ikt}$ $(k \in \mathbb{Z})$ an und versucht, f mit Linearkombinationen

$$\sum_{k=-M}^{M} a_k \cdot e^{ikt}$$

anzunähern.

Grundlagen Für welche 2π-periodischen Funktionen f gibt es eine konvergente Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{ikt}$$

(Wir haben im Laufe der Vorlesung schon Fourierreihen angetroffen, denn die Laurentreihe ist ein Spezialfall der Fourierreihe). Wie berechnet man die a_k? Wir haben schon folgendes bewiesen: Es sei g eine analytische Funktion in $D_\rho(0)\backslash\{0\}$, $\rho > 0$. Wähle ein $r < \rho$, $r > 0$ so dass $f(t) := g(re^{it})$, dann gilt wegen Satz 8.13

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot (re^{it})^k$$

und für die Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma f(\zeta) \cdot \zeta^{-k-1}\, \mathrm{d}\zeta$$

wobei γ ein Kreis um 0 mit Radius r darstellt. Das bedeutet, $f(t)$ hat die Fourierkoeffizienten $a_k = c_k \cdot r^k$. [V30-300502] Wir haben gesehen, dass

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (ra^{it})^k \qquad\qquad f(t) = g(re^{it})$$

Wir wollen nun die c_k berechnen:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(\zeta)\zeta^{-k-1} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} g(re^{it}) r^{-(k+1)} e^{-(k+1)it} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(re^{it})\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot r^{-(k+1)} e^{-it} e^{-ikt} \cdot rie^{it}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

also

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$$

wobei für die a_k gilt

$$a_k = c_k r^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$$

Die a_k heissen Fourierkoeffizienten.

Buch Fourieranalysis Cambridge University Press von T.W. Körner

Die Fourier Entwicklung ergibt unter milden Bedingungen folgenden Satz

Satz 10.1 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π periodische Funktion, so dass f überall zweimal stetig differenzierbar ist ($= \left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}\right)$ ist stetig). Definiere

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$$

dann gilt

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$$

Die Aussage stimmt auch, wenn $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ ausserhalb einer diskreten Menge beschränkt bleibt.

Satz 10.2 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π periodische Funktion.

1. Wenn es Zahlen $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$, dann sind die a_k eindeutig bestimmt durch f
2. Wenn f stetig ist und
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$
dann ist $f = 0$

Bemerkung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ilt}\cdot e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases}$$

Hier passieren ähnliche Dinge wie in einem endlichen Vektorraum mit dem Skalarprodukt.

Beispiel 10.I Sei $f(t) = t^2$, $\forall\, t \in [-\pi, \pi]$, und f eine 2π periodische Funktion. $k \neq 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Partielle Integration $\int uv' = uv - \int u'v$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\left[t^2\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2t\frac{1}{-ik}e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left[2t\left(\frac{1}{-ik}\right)^2 e^{-ikt}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\left(\frac{1}{-ik}\right)^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\pi}{k^2}\left(e^{-ik\pi} + e^{ik\pi}\right) + 2\left(\frac{1}{-ik}\right)^3\left[\left(e^{-ikt}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi(-1)^k}{k^2} - 2i\frac{1}{k^3}\Im(e^{-ikt})\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{4\pi(-1)^k}{k^2} = \frac{2(-1)^k}{k^2} \end{aligned}$$

Und für $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k^2} e^{ikt} \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k^2} (e^{ikt} + e^{-ikt}) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kt) \qquad \forall\, t \in (-\pi, \pi)
\end{aligned}$$

Für $t = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich somit

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} 4(-1)^{2k} \frac{(-1)^k}{(2k)^2}$$

Woraus folgt

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \pi^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{48} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} - \cdots \approx \frac{10}{48}
\end{aligned}$$

Beispiel 10.II Sei $f(t) = \cos(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Z}\}$, $\forall\, t \in [-\pi, \pi]$ und f 2π periodisch.

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha t) e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}}{2} e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(\alpha+k)t} + e^{-i(\alpha+k)t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{i(\alpha-k)t}}{i(\alpha-k)} - \frac{e^{-i(\alpha+k)t}}{i(\alpha+k)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{i(\alpha-k)} 2i\Im(e^{i(\alpha-k)\pi}) - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{i(\alpha+k)} 2i\Im(e^{-i(\alpha+k)\pi}) \\
&= \frac{1}{2\pi(\alpha-k)}\sin(\alpha-k)\pi + \frac{1}{2\pi(\alpha+k)}\sin(\alpha+k)\pi \\
&= \frac{\sin(\alpha\pi)(-1)^k}{2\pi(\alpha-k)} + \frac{\sin(\alpha\pi)(-1)^k}{2\pi(\alpha+k)} \\
&= (-1)^k\frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha-k} + \frac{1}{\alpha+k}\right] \\
&= \frac{(-1)^k\sin(\alpha\pi)}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2-k^2}
\end{aligned}$$

Dabei gilt $a_k = a_{-k}$, daraus folgt

$$\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right) \\
&= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\alpha} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin(\alpha\pi)}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2-k^2}\cos(kt) \\
&= \cos(\alpha t) \qquad\qquad \forall\, t \in (-\pi, \pi)
\end{aligned}$$

Für $t = \pi$

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)} &= \cot(\alpha\pi) \\
&= \frac{1}{\pi\alpha} + \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{2\alpha(-1)^k(-1)^k}{\pi(\alpha^2-k^2)} \\
&= \frac{1}{\pi\alpha} + \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-k^2)}
\end{aligned}$$

Bemerkung (Serie 8 Übung 5) [V17-040602]

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)}$$

Beweis von 10.1

Lemma 10.3 Wenn

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$ gleichmässig gegen eine Funktion $f_0(t)$

Errinnerung Gleichmässig heisst, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, k_0 \geq 0$, so dass $\forall\, l \geq k_0$ gilt

$$\left| \sum_{k \leq l} a_k \cdot e^{ikt} - f_0(t) \right| < \varepsilon \qquad\qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Beweis Die Reihe konvergiert absolut, weil $\left|a_k e^{ikt}\right| = |a_k|$ und deshalb konvergiert $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$ punktweise. Die Gleichmässigkeit wird ausgelassen.

Lemma 10.4 Wenn $h(t)$ 2mal stetig differenzierbar ist und 2π periodisch, dann gilt

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) e^{-ikt}\, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{M}{k^2}$$

wobei $M > 0$

Beweis

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} h(t) e^{-ikt}\, \mathrm{d}t &= \left[h(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} h'(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik}\, \mathrm{d}t \\
&= - \underbrace{\left[h' f(t) = \frac{e^{-ikt}}{(-ikt)^2} \right]_0^{2\pi}}_{0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} h''(t) \cdot \frac{e^{-ikt}}{(-ik)^2}\, \mathrm{d}t}_{=:\aleph} \\
|\aleph| &= \frac{1}{k^2} \left| \int_0^{2\pi} h''(t) \cdot e^{-ikt}\, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{k^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} |h''(t)\, \mathrm{d}t|}_{=M} \quad \square
\end{aligned}$$

Es sei jetzt f die Funktion im Satz 10.1 und $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ die Fourierkoeffizienten von f. Wegen Lemma 10.4 gilt $|a_k| \leq \frac{M}{k^2}$ und deshalb

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k| \leq M \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

wegen Lemma 10.3 gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt} = f_0(t)$$

wir rechnen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(t)e^{-ilt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi} e^{ilt}\cdot e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = a\cdot l$$

Also haben $f_0(t)$ und $f(t)$ die selben Fourierkoeffizienten und wegen Satz 10.2 gilt $f_0 = f \quad \square$

Cosinus- und Sinusreihen Sei $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π periodische und 2mal stetig differenzierbare Funktion

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$$

Da $f(t) = \overline{f(t)}$ gilt

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt} = \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{a}_k e^{-ikt}$$

$(*)$ wenn $f(t) = f(-t)$ dann gilt

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{-ikt}$$

woraus folgt $a_k = \overline{a}_k$
$(**)$ wenn $f(t) = -f(-t)$ dann gilt:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt} = -\sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{-ikt}$$

woraus folgt $a_k = -\overline{a}_k$. Im Fall $(*)$ gilt $a_k = a_{-k}$, im Fall $(**)$ $a_k = -a_{-k}$
[V18-060602] Fall $*$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (e^{ikt} - e^{-ikt}) \\ &= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) \end{aligned}$$

Für die a_k gilt

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(e^{ikt}+e^{-ikt})\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Fall $**$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(e^{ikt}-e^{-ikt}) \\
&= 2i\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kt)
\end{aligned}$$

Für die a_k gilt

$$\begin{aligned}
a_k &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(e^{-ikt}-e^{ikt})\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Im Ganzen ergibt sich

a) f gerade

$$f(t) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\cos(kt) \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$$

b) f ungerade

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kt) \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t$$

Satz 10.5 (von Parseval) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 2π periodische Funktion.

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, \mathrm{d}t$$

dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Beweis Wenn f 2mal stetig differenzierbar ist konvergiert

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$$

gleichmässig, siehe Lemma 10.3. Daraus folgt mit der Gleichung $z\overline{z} = |z|^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt} \right)}_{f(t)} \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{a}_k e^{-ikt} \right)}_{\overline{f}(t)} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a_k \overline{a}_l \underbrace{e^{ikt} \cdot e^{-ilt} \, \mathrm{d}t}_{\begin{cases} 0 & k = l \\ 1 & k \neq l \end{cases}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k \overline{a}_k}_{|a_k|^2}
\end{aligned}$$

Zusammenfassung

72. Fourierreihen geben eine Methode, um periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zu approximieren. Man fängt mit der 2π-periodischen Funktion $t \mapsto e^{ikt}$ ($k \in \mathbb{Z}$) an und versucht, f mit Linearkombinationen

$$\sum_{k=-M}^{M} a_k \cdot e^{ikt}$$

anzunähern.

73. Die Fourierreihe ist

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$$

wobei für die a_k gilt

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, \mathrm{d}t$$

Die a_k heissen Fourierkoeffizienten.

74. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π periodische Funktion.

1. Wenn es Zahlen $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$, dann sind die a_k eindeutig bestimmt durch f

2. Wenn f stetig ist und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, \mathrm{d}t = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

dann ist $f = 0$

75.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ilt} \cdot e^{-ikt} \, \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases}$$

76.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1 + x^n} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)}$$

77. Gleichmässige Konvergenz heisst, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, k_0 \geq 0$, so dass $\forall\, l \geq k_0$ gilt

$$\left| \sum_{k \leq l} a_k \cdot e^{ikt} - f_0(t) \right| < \varepsilon \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

78. Wenn $h(t)$ 2mal stetig differenzierbar ist und 2π periodisch, dann gilt

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) e^{-ikt} \, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{M}{k^2}$$

wobei $M > 0$

79.

a) f gerade

$$f(t) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(kt) \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) \, \mathrm{d}t$$

b) f ungerade

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt) \qquad\qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t$$

80. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 2π periodische Funktion. Der Satz von Parseval lautet:

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$$

dann gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

11 FOURIER - TRANSFORMATION

Die Fourier Transformation ist ein kontinuierliches Analogon der Fourierreihen.

NOTATION Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $f \in L^1(\mathbb{R})$ heisst, f ist auf jedem Intervall $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ Riemann integrierbar und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \,\mathrm{d}t < \infty$$

DEFINITION 11.1 Die Fourier-Transformierte $f \in L^1(\mathbb{R})$ von f ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}\,\mathrm{d}x$$

DEFINITION 11.2 Die Faltung von f und g wobei $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

SATZ 11.3 Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

a) $f * g \in L^1(\mathbb{R})$

b) $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

c) (Inversionsformel) Wenn $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)e^{ixt}\,\mathrm{d}x = f(t)$$

in allen Stetigkeitspunkten t von f.

d) (Eindeutigkeit) Wenn f stetig ist und $\hat{f}(t) = 0$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, dann ist $f(t) \equiv 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$

e)
- $f * g = g * f$
- $(\lambda f) * g = \lambda(f * g) \quad \lambda \in \mathbb{C}$
- $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2\ \forall\, g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R})$

Beispiel 11.I Sei

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad\qquad f \in L^1(\mathbb{R}), t < 0$$

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt}\,\mathrm{d}x$$

$t < 0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\pi i \sum \{\text{Res von } \frac{e^{-itz}}{1+z^2} \text{ in } z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\} \\ &= 2\pi i \frac{e^{-it}}{2i} = \pi e^t\end{aligned}$$

Ähnlich wenn $t > 0$

$$\hat{f}(t) = \pi e^{-t}$$

Das heisst

$$\hat{f}(t) = \pi e^{-|t|} \qquad\qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Bestätigung von c Mit dem Ergebnis des Beispiels 11.I

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{ixt}\,\mathrm{d}x &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{ixt}\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^{\infty} e^{-x} e^{ixt}\,\mathrm{d}x + \pi \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{ixt}\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \left[\frac{e^{x(it-1)}}{it-1}\right]_0^{\infty} + \pi \left[\frac{e^{x(it+1)}}{it+1}\right]_{-\infty}^{0}\end{aligned}$$

Weil $\lim_{x\to\infty} e^{x(it-1)} = \lim_{x\to\infty} e^{xit} e^{-x} = 0$

$$\begin{aligned}&= -\pi \frac{1}{it-1} + \pi \frac{1}{it+1} \\ &= \pi \left(\frac{1}{it+1} - \frac{1}{it-1}\right) \\ &= \pi \left(\frac{it-1-(it+1)}{-t^2-1}\right) \\ &= 2\pi \frac{1}{t^2+1}\end{aligned}$$

Bestätigung von b Sei $t \neq 0$

$$
\begin{aligned}
(f * f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) f(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-x)^2+1} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= 2\pi i \sum \left\{ \text{Res von } \frac{1}{(t-z)^2+1} \frac{1}{1+z^2} \text{ in } \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\} \right\}
\end{aligned}
$$

Residuuen bei $z = i$, $z = t + i$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi i \left. \frac{1}{2\big(1+(t-z)^2\big)z - 2(t-z)(1+z^2)} \right|_{z=i} + 2\pi i (\cdot) \Big|_{z=i+t} \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{2\big(1+(t-i)^2\big)i - 2(t-i)(1+i^2)} \right) \\
&\quad + 2\pi \left(\frac{1}{2\big(1+(-i)^2\big)(t+i) - 2(-i)\big(1+(t+i)^2\big)} \right) \\
&= \frac{\pi}{t(t-2i)} + \frac{\pi}{t(t+2i)} \\
&= 2\pi \Re \left(\frac{1}{t(t-2i)} \right) \\
&= 2\pi \Re \left(\frac{t+2i}{t(t^2+4)} \right) \\
&= \frac{2\pi}{t^2+4}
\end{aligned}
$$

Die Glockenkurve , ein wichtiges Beispiel. [V19-110602]

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-ixt} = e^{-\frac{t^2}{2}}
$$

Beweis Man errinnert sich, dass

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}
$$

Woraus folgt

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+a)^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 1
$$

also

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-ax} \cdot e^{-\frac{a^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 1
$$

durch Einsetzen von it in a erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-ixt}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{e^{-(it)^2/2}} \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

Seien $g,\ f \in L^1(\mathbb{R})$. Wir setzen (11.3) fort:

f) Wenn $g(t) = f(t-h),\ h \in \mathbb{R}$ dann gilt

$$\hat{g}(t) = e^{-iht}\hat{f}(t)$$

g) Wenn $g(t) = f'(t)$ dann gilt

$$\hat{g}(t) = it\hat{f}(t)$$

h) Wenn $g(t) = tf(t)$ dann gilt

$$\hat{g}(t) = i\hat{f}(t)$$

i) Wenn $g(t) = f\left(\frac{t}{a}\right),\ a \in \mathbb{R},\ a > 0$ dann gilt

$$\hat{g}(t) = a\hat{f}(at)$$

j) Wenn $g(t) = e^{ixt} = f(t)$ dann gilt

$$\hat{g}(t) = \hat{f}(x-t)$$

Bemerkung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ixt}\,\mathrm{d}x}_{\text{Inverse Fourier Transformation von } f(-x)}$$

siehe c) in (11.3)

Satz 11.4 (Parseval-Plancherel) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}),\ \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, dann gilt

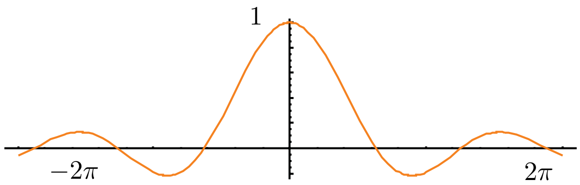
$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(x)\right|^2\,\mathrm{d}x$$

Beweis Ähnlich wie der Beweis zu den Fourierreihen

Bandbegrenzte Signale Sei $\Omega > 0$, ein Ω-bandbegrenztes Signal ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ so dass $\hat{f}(t) = 0 \ \forall \ |t| > \Omega$

ERRINNERUNG Die sogenannte *Sincfunktion* ist

$$\operatorname{sinc}(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$



SATZ 11.5 [V20-130602] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Ω-bandbegrenzte Funktion, $\Omega > 0$, $T = \frac{\pi}{\Omega}$, dann ist

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\operatorname{sinc}\big(\Omega(t - kT)\big) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \qquad *$$

BEWEIS Es sei $g_k(t) = f(kT)\operatorname{sinc}\big(\Omega(t - kT)\big)$, zu berechnen: $\hat{g}_k(t)$. Man betrachtet

$$q(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |t| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die inverse Fouriertransformierte ist damit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} q(x)e^{ixt}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{ixt}}{it}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2it}(e^{it} - e^{-it}) \\ &= \frac{1}{t}\sin(t) = \operatorname{sinc}(t) \end{aligned}$$

Die Rechnung wird nicht vollständig vorgenommen aber es folgt

$$\hat{g}_k(t) = f(kT)q\left(\frac{t}{\Omega}\right) \cdot \frac{e^{-itkT}}{\Omega}2\pi$$

$g_k(t)$ ist Ω-bandbegrenzt. Zu berechnen: Die Fouriertransformierte der rechten Seite von $*$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir setzen $\Omega = \pi$ und $T = 1$.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)q\left(\frac{t}{\pi}\right)\frac{e^{-itk}}{\pi}2\pi = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(-k)e^{itk} & |t| < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zu berechnen, Fouriertransformierte der linken Seite von $*$. Man bemerke, dass

$$h(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi l + t)$$

Die 2π periodische Erweiterung von $\hat{f}(t)$ ist, aus π Bandbegrenztheit

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$$

wobei für die a_{-k} gilt

$$\begin{aligned} a_{-k} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(2\pi l + t) e^{ikt} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{ikt} \, \mathrm{d}t = f(k) \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt

$$h(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(-k) e^{ikt}$$

wegen der Inversionsformel (11.3 c) ist man fertig.

Zusammenfassung

81. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $f \in L^1(\mathbb{R})$ heisst, f ist auf jedem Intervall $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ Riemann integrierbar und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$$

82. Die Fourier-Transformierte $f \in L^1(\mathbb{R})$ von f ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt} \, \mathrm{d}x$$

83. Die Faltung von f und g wobei $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

84. Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

    a) $f * g \in L^1(\mathbb{R})$

    b) $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

    c) (Inversionsformel) Wenn $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ dann ist

    $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{ixt} \, \mathrm{d}x = f(t)$$

    in allen Stetigkeitspunkten t von f.

d) (Eindeutigkeit) Wenn f stetig ist und $\hat{f}(t) = 0$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, dann ist $f(t) \equiv 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$

e)
- $f * g = g * f$
- $(\lambda f) * g = \lambda(f * g) \quad \lambda \in \mathbb{C}$
- $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \ \forall\ g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R})$

f) Wenn $g(t) = f(t-h)$, $h \in \mathbb{R}$ dann gilt

$$\hat{g}(t) = e^{-iht}\hat{f}(t)$$

g) Wenn $g(t) = f'(t)$ dann gilt

$$\hat{g}(t) = it\hat{f}(t)$$

h) Wenn $g(t) = tf(t)$ dann gilt

$$\hat{g}(t) = i\hat{f}(t)$$

i) Wenn $g(t) = f\left(\frac{t}{a}\right)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ dann gilt

$$\hat{g}(t) = a\hat{f}(at)$$

j) Wenn $g(t) = e^{ixt} = f(t)$ dann gilt

$$\hat{g}(t) = \hat{f}(x-t)$$

85. Für die Glockenkurve gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-ixt} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

86. Der Satz von Parseval-Plancherel lautet: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, dann gilt

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(x)\right|^2 \, \mathrm{d}x$$

87. Sei $\Omega > 0$, ein Ω-bandbegrenztes Signal ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ so dass $\hat{f}(t) = 0 \ \forall\ |t| > \Omega$

88. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Ω-bandbegrenzte Funktion, $\Omega > 0$, $T = \frac{\pi}{\Omega}$, dann ist

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\operatorname{sinc}\big(\Omega(t-kT)\big) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \qquad *$$

12 DISKRETE FOURIERANALYSIS

Wir haben eine Formel für die Fourierkoeffizienten, die wir nun numerisch berechnen möchten.

Sei $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π periodische Funktion, die Trapezformel liefert

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} &\approx \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{N-1}\left[f\left(\frac{l2\pi}{N}\right)e^{\frac{-2\pi ikl}{N}} + f\left(\frac{(l+1)2\pi}{N}\right)e^{-\frac{ik(l+1)2\pi}{N}}\right]\frac{1}{2\pi}\\ &\approx \sum_{l=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi l}{N}\right)e^{-\frac{2\pi ikl}{N}} \qquad N \gg 1\end{aligned}$$

Sei $\mathbb{Z}/N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ ($= [N]$ im Skript). Man kann zwei Elemente $a, b \in \mathbb{Z}/N$ summieren, indem man a und b das Element $a+b-f(a+b)N$ zuordnet, wobei $f(a+b)$ die grösste ganze Zahl m ist, so dass $mN \leq a+b$. Man schreibt auch $+$ für diese Summe.

Beispiel 12.I In $\mathbb{Z}/6$

$$1 + 1 = 2 \,(\bmod 6) \qquad\qquad 1 + 5 = 6 = 0 \,(\bmod 6)$$
$$3 + 4 = 7 = 1 \text{ weil } 6 \cdot 1 < 7$$

Definition 12.1 Die Menge der Funktionen $\mathbb{Z}/N \to \mathbb{C}$ wird mit $\mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ bezeichnet. Die Menge $(\mathbb{Z}/N)$ bildet einen *komplexen Vektorraum* unter Addition von Funktion und Multiplikation einer Funktion durch eine komplexe Zahl.

Definition 12.2 Ein *Charakter* von $\mathbb{Z}/N$ ist eine Funktion $f \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ so dass

$$f\big(a + b(\bmod N)\big) = f(a)f(b) \qquad\qquad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}/N$$

Satz 12.3 Die Charakteren von $\mathbb{Z}/N$ sind genau die Funktionen $\chi_{kN} = \chi_k : \mathbb{Z}/N \to \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq N-1$ wobei

$$\chi_k(a) = e^{\frac{k2\pi ia}{N}}$$

Beweis Es sei $f : \mathbb{Z}/N \to \mathbb{C}$ ein Charakter, dann gilt

$$f(1)^N = f\big(N\big) = f(0) = 1$$

Da $N \cdot 1$ mit sich addiert N ergibt, $N = 0\,(\bmod N)$ und $f(0) = 1$. Das heisst

$$f(0) = e^{\frac{2\pi k}{N}}$$

für ein k, $0 \leq k \leq N$. Aus Definition gilt

$$\begin{aligned}f(a) &= \left(e^{\frac{2\pi ia}{N}}\right)^a\\ &= e^{\frac{2\pi iak}{N}}\end{aligned}$$

Definition 12.4 Das Skalarprodukt von $f, g \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ ist

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\overline{g(k)}$$

Satz 12.5 Der komplexe Vektorraum ist endlich dimensional und die orthonormale Basis von $\mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ wird gegeben durch die Charaktere. Wenn ich also lineare Kombinationen von Charakteren verwende, erhalte ich alle Funktionen, wobei die Linearkombination für jede Funktion eindeutig ist. Fourieranalysis auf dem Raum $\mathscr{C}$ ist eigentlich nur die Darstellung einer Funktion in derartigen Linearkombinationen.

Satz 12.6 [V21-180602]

- $\mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ ist endlich dimensional
- Eine orthonormale Basis ist gegeben durch $\{\chi_0, \dots, \chi_{n-1}\}$

Beweis Die Funktion $g_k : \mathbb{Z}/N \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$g_k(\chi) = \begin{cases} 1 & \chi = k \\ 0 & \chi \neq k \end{cases}$$

Aus Definition gilt $\forall\ f \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$

$$f = f(0)g_0(\chi) + f(1)g_1(\chi) + \dots + f(N-1)g_{N-1}(\chi)$$

Diese Zerlegung ist eindeutig, dass heisst $\{g_0, \dots, g_{N-1}\}$ bilden eine Basis von $\mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$. Da es auch N Charakteren χ_k gibt, reicht es zu zeigen, dass

$$\langle \chi_k, \chi_l\rangle = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Wenn $k \neq l$ folgt

$$\begin{aligned}\langle \chi_k, \chi_l\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \chi_K(j)\overline{\chi_l(j)} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \chi_k\big(j + j_0 \pmod N\big)\overline{\chi_l\big(j + j_0 \pmod N\big)} \\ &= \chi_k(j_0)\overline{\chi_l(j_0)}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \chi_k(j)\overline{\chi_l(j)}\end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\overline{\chi_l(j_0)} = \big(\chi_k(j_0)\big)^{-1}$$

Wenn $\langle \chi_k, \chi_l\rangle \neq 0$ dann folgt

$$\frac{\chi_k(j_0)}{\chi_l(j_0)} = 1 \qquad \forall\ j_0 \in \mathbb{Z}/N$$

Das heisst, $\chi_k(j_0) = \chi_l(j_0)$ was ein Widerspruch zu $k \neq l$ ist. Also ist $\langle \chi_k, \chi_l \rangle = 0$. Wenn $k = l$ folgt

$$\langle \chi_k, \chi_l \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \chi_k(j) \overline{\chi_l(j)}$$

wobei auch hier $\chi_l(j) = \big(\chi_k(j)\big)^{-1}$ also

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} 1 = \frac{N}{N} = 1$$

Aus der Linearen Algebra ist uns die folgende Formel bekannt

$$f = \sum_{k=0}^{N-1} \langle f, \chi_k \rangle \chi_k \qquad \star \qquad\qquad \forall\ f \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$$

Dies ist die diskrete Fourier Entwicklung von f. Konkreter

$$f(a) = \sum_{k=0}^{N-1} \langle f, \chi_k \rangle e^{\frac{2\pi i a k}{N}}$$

wobei

$$\langle f, \chi_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j) e^{-\frac{2\pi i j k}{N}}$$

Beispiel 12.II Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π periodische Funktion. Es sei weiter $N > 0$. Man definiere $f_N : \mathbb{Z}/N \to \mathbb{C}$ durch

$$f_N(a) = f\left(\frac{2\pi a}{N}\right)$$

dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{N \to \infty} \langle f_N, \chi_{kN} \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$$

und

$$f\left(\frac{2\pi a}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \langle f_N, \chi_{kN} \rangle e^{\frac{2\pi i a k}{N}} \qquad\qquad \forall\ N > 0$$

Schnelle Fouriertransformation Es sei $f \in (\mathbb{Z}/N)$. Die Berechnung von den $\langle f, \chi_k \rangle$ benötigt im schlechtesten Fall $\propto N^2$ Additionen / Multiplikationen. Die schelle Fouriertransformation ermöglicht $\propto N \log(N)$ Additionen / Multiplikationen.

Satz 12.7 Es sei $N > 0$. Annahme: $\forall\ f \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ kann man alle $\langle f, \chi_{kN} \rangle$, wobei $0 \leq k \leq N-1$, berechnen mit N Additionen / Multiplikationen.

Satz 12.8 [V22-200602] Dann kann man für jedes $\tilde{f} \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ alle

$$\langle \tilde{f}, \chi_{kN} \rangle \qquad 0 \leq k \leq 2N-1$$

berechnen mit $2M + 8N$ Additionen / Multiplikation.

Beweis Wir berechnen die Zahlen

$$e^{\frac{2\pi i}{2N}}, e^{\frac{4\pi i}{2\pi}}, \dots, e^{\frac{(2N-1)2\pi i}{2N}}$$

$\propto$ 2N Multiplikationen.

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{f}, \chi_{k,2N} \rangle &= \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}(j) e^{-\frac{2\pi i k 2j}{2N}} + \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}(2j+1) e^{-\frac{2\pi i k(2j+1)}{2N}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}(2j) e^{-\frac{2\pi i k}{N}} + \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}(2j+1) e^{-\frac{2\pi i k}{N}} \right) e^{-\frac{2\pi i k}{2N}} \right)
\end{aligned}$$

Der erste Summand ist $\langle \tilde{f}_1, \chi_{k,N} \rangle$ wobei $\tilde{f}_1 \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$. $\tilde{f}_1(a) = f(2a)$. Der zweite Summand ist $\langle \tilde{f}_2, \chi_{k,N} \rangle$ wobei $\tilde{f}_2 \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$. $\tilde{f}_2(a) = f(2a+1)$. Im Ganzen also $2N + 3 \cdot 2N + 2M = 8N + 2M$

Korollar 12.9 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$. Man kann alle Fourierkoeffizienten $\langle f, \chi_{k,2^n} \rangle$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$ berechnen mit

$$n 2^{n+2} = 4 \log_2(2^m) 2^m$$

Additionen / Multiplikationen.

Beweis Über Induktion. Induktionsannahme, das Korollar stimmt für fixes $n > 0$. Wegen Satz 12.7 braucht man $2n2^{n+1} + 82^n$, $[N = 2^n]$ Additionen / Multiplikationen um *alle* Fourierkoeffizienten einer Funktion $f \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ zu berechnen. Aber

$$\begin{aligned}
2n2^{n+2} + 82^n &= n2^{n+3} + 2^{n+3} \\
&= (n+1)2^{(n+1)+2}
\end{aligned}$$

Also gilt die Aussagen für alle $n > 0$

Zusammenfassung

89.

$$\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \approx \sum_{l=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi l}{N}\right) e^{-\frac{2\pi i k l}{N}} \qquad N \gg 1$$

90. Wir definieren $\mathbb{Z}/N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Man kann zwei Elemente $a, b \in \mathbb{Z}/N$ summieren, indem man a und b das Element $a+b-f(a+b)N$ zuordnet, wobei $f(a+b)$ die grösste ganze Zahl m ist, so dass $mN \leq a+b$.

91. Die Menge der Funktionen $\mathbb{Z}/N \to \mathbb{C}$ wird mit $\mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ bezeichnet. Die Menge $(\mathbb{Z}/N)$ bildet einen komplexen Vektorraum unter Addition von Funktion und Multiplikation einer Funktion durch eine komplexe Zahl.

92. Ein Charakter von $\mathbb{Z}/N$ ist eine Funktion $f \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ so dass

$$f\big(a + b(\bmod N)\big) = f(a)f(b) \qquad\qquad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}/N$$

93. Die Charakteren von $\mathbb{Z}/N$ sind genau die Funktionen $\chi_{kN} = \chi_k : \mathbb{Z}/N \to \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq N-1$ wobei

$$\chi_k(a) = e^{\frac{k2\pi i a}{N}}$$

94. Das Skalarprodukt von $f, g \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ ist

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\overline{g(k)}$$

95.

- $\mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ ist endlich dimensional
- Eine orthonormale Basis ist gegeben durch $\{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$

96. Die Funktion $g_k : \mathbb{Z}/N \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$g_k(\chi) = \begin{cases} 1 & \chi = k \\ 0 & \chi \neq k \end{cases}$$

Aus Definition gilt $\forall\, f \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$

$$f = f(0)g_0(\chi) + f(1)g_1(\chi) + \cdots + f(N-1)g_{N-1}(\chi)$$

Diese Zerlegung ist eindeutig

97. Es sei $N > 0$. Annahme: $\forall\, f \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ kann man alle $\langle f, \chi_{kN}\rangle$, wobei $0 \leq k \leq N-1$, berechnen mit N Additionen / Multiplikationen.

98. Für jedes $\tilde{f} \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$ kann man alle

$$\langle \tilde{f}, \chi_{kN}\rangle \qquad\qquad 0 \leq k \leq 2N-1$$

berechnen mit $2M + 8N$ Additionen / Multiplikation.

99. $f \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}/N)$. Man kann alle Fourierkoeffizienten $\langle f, \chi_{k,2^n}\rangle$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$ berechnen mit

$$n2^{n+2} = 4\log_2(2^m)2^m$$

Additionen / Multiplikationen.

13 LAPLACE TRANSFORMATION

Es sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wenn sie existiert ist die *Laplace Transformierte* einer Funktion definiert durch

$$\mathscr{L}(f)(z) := \int_0^\infty e^{-zt} f(z)\,\mathrm{d}t \qquad z \in \mathbb{C}$$

Definition 13.1 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist ein *Evau*, wenn $\exists\, A, B \in \mathbb{R}$, $\forall\, t > 0$, so dass

1. $f(t) = 0$, $\forall\, t < 0$
2. $|f(t)| \leq Ae^{tB}$, $\forall\, t > 0$
3. f ist stückweise stetig.

Bemerkung Der Begriff der schellen Fourier Transformation ist eigentlich irreführend, es geht um die selbe diskrete Fourieranalysis, jedoch schneller

Satz 13.2 (Konvergenzsatz) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ein *Evau*. Dann gilt

i) Es sei $\mathscr{L}(f)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t$. Es gibt ein σ :, $-\infty \leq \sigma < \infty$, so dass

$$\mathscr{L}(f)(z) \begin{cases} \text{konvergiert wenn} & \Re(z) > \sigma \\ \text{divergiert wenn} & \Re(z) < \sigma \end{cases}$$

weiter ist $\mathscr{L}(f)(z)$ holomorph in $\{z \,|\, \Re(z) > \sigma\}$

ii) Es sei $\rho =$ das Infimum von $\{B \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, A > 0 \text{ so dass } |f(t)| \leq Ae^{Bt}\}$. Es gilt $\sigma \leq \rho$.

Notation Um die Funktionszugehörigkeit zu kennzeichnen, schreiben wir $\sigma = \sigma_f$, $\rho = \rho_f$

Satz 13.3 (Eindeutigkeit) Seien f und g zwei stetige Evau. Wenn

$$\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(g) \text{ dann } f = g$$

Rechenregeln Seien f und g zwei stetige Evau

1. $\mathscr{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathscr{L}(f) + \mu\mathscr{L}(g)$ wobei λ, $\mu \in \mathbb{C}$

2. $g(t) = f(\alpha t)$, $\alpha > 0$ dann

$$\mathscr{L}(g)(z) = \frac{1}{\alpha}\mathscr{L}(f)\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

Satz 13.4 Sei f ein stückweise C^1 Evau, dann gilt für $\Re(z) > \rho_f$

$$\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\right)(z) = z\mathscr{L}(f)(z) - f(0)$$

Beweis Aus Definition gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\right)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{t_0\to\infty}\left(\left[e^{-zt}f(t)\right]_0^{t_0} + \int_0^{t_0} ze^{-zt}f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \lim_{t_0\to\infty} e^{-zt_0}f(t_0) - f(0) + z\mathscr{L}(f)(z)\end{aligned}$$

wobei für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\left|e^{-zt_0}f(t_0)\right| &= e^{-\Re(z)t_0}\left|f(t_0)\right|\\ &\le e^{-(\rho_f+\varepsilon)t_0}\left|f(t_0)\right|\\ &\le e^{-(\rho_f+\varepsilon)t_0}Ae^{(\rho_f+\varepsilon/2)t_0}\\ &= Ae^{-\frac{\varepsilon}{2}t_0} \to 0\end{aligned}$$

wenn $t_0 \to \infty$.

Satz 13.5 Es sei f ein Evau und

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

dann gilt für $\Re(z) > \max\{0, \rho_f\}$:

$$\mathscr{L}(g)(z) = \frac{\mathscr{L}(f)(z)}{z}$$

ohne Beweis

Satz 13.6 (1ter Verschiebungssatz) [V23-250602] Sei f ein Evau, $a \in \mathbb{C}$ für $\Re(z) > \rho_f - \Re(a)$ dann gilt

$$\mathscr{L}(g)(z) = \mathscr{L}(f)(z+a)$$

wobei $g(t) = e^{-at}f(t)$

Beweis

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(g)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt}e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty e^{-(z+a)t}f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \mathscr{L}(f)(z+a)\end{aligned}$$

Satz 13.7 (2ter Verschiebungssatz) Sei f ein Evau, $a > 0$ und $g(f) = f(t-a)$. Dann gilt

$$\mathscr{L}(g)(z) = e^{-az}\mathscr{L}(f)(z)$$

Beweis

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(g)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-zt} f(t-a)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Sei $\tau = t - a$

$$\begin{aligned}&= \int_0^\infty e^{-z(\tau+a)} f(\tau)\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-za}\mathscr{L}(f)(z)\end{aligned}$$

Einige Laplace Transformierte Sei $a \in \mathbb{C}$

- $f(t) = e^{-at}$

  $$\mathscr{L}(f) = \frac{1}{z+a}$$

  $\sigma_f = -\Re(a)$
- $f(t) = \cos(at)$

  $$\mathscr{L}(f) = \frac{az}{z^2+a^2}$$

  $\sigma_f = |\Im(a)|$
- $f(t) = \sin(at)$

  $$\mathscr{L}(f) = \frac{a}{z^2+a^2}$$

  $\sigma_f = |\Im(a)|$
- $f(t) = t^n$

  $$\mathscr{L}(f) = \frac{n!}{z^{n+1}}$$

  $\sigma_f = 0$

Beispiel 13.I Beweise, dass

$$\mathscr{L}\left(e^{-at}\right) = \frac{1}{z+a}$$

und bestimme ρ_f.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f) &= \int_0^\infty e^{-at}e^{-zt}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty e^{-(a+z)t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{e^{-(a+z)t}}{-(a+z)}\right]_0^\infty\end{aligned}$$

$\Im(z) > 0$

$$\begin{aligned}&= 0 - \frac{1}{-(a+z)}\\ &= \frac{1}{a+z}\end{aligned}$$

$\sigma_f \leq \rho_f$

$$\begin{aligned}\rho_f &= \text{Infimum}\ \{B \in \mathbb{R} | \exists\ A > 0 \quad \underbrace{\left|e^{-at}\right|}_{e^{-\Re(a)t}} \leq Ae^{Bt}\}\\ &= -\Re(a)\end{aligned}$$

Anwendung auf Differentialgleichung *Variante der Pendelgleichung.* Löse $y(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \qquad \star$$

wobei

$$y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) \qquad\qquad y'' = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)$$

Sei eine Randbedingung

$$y(0) = 0 \qquad\qquad y'(0) = 1$$

Wir wenden $\mathscr{L}$ auf beide Seiten der Gleichung $\star$ an und verwenden

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(y')(z) &= z\mathscr{L}(y)(z) - y(0)\\ &= z\mathscr{L}(y)(z)\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(y'')(z) &= z\mathscr{L}(y')(z) - y'(0)\\ &= z^2\mathscr{L}(y)(z) - 1\end{aligned}$$

also

$$z^2\mathscr{L}(y)(z) - 1 + 4z\mathscr{L}(y)(z) + 3\mathscr{L}(y)(z) = 0$$

also

$$\begin{aligned}(z^2+4z+3)\mathscr{L}(y)(z) &= 1\\ \mathscr{L}(y)(z) &= \frac{1}{z^2+4z+3}\\ &= \frac{1}{(z+1)(z+3)}\end{aligned}$$

Um diesen Bruch umzuformen wenden wir die Partialbruchzerlegung an.

$$\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+3}=\frac{A(z+3)+B(z+1)}{(z+1)(z+3)}$$

also

$$Az+Bz=0 \qquad\qquad A+B=1$$

womit $B=-\frac{1}{2}$ und $A=\frac{1}{2}$. Unsere Rechnung setzt sich wie folgt fort:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(y)(z) &= \frac{\frac{1}{2}}{z+1}-\frac{\frac{1}{2}}{z+3}\\ &= \frac{1}{2}\mathscr{L}(e^t)-\frac{1}{2}\mathscr{L}(e^{-3t})\\ &= \mathscr{L}\left(\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{2}\right)\end{aligned}$$

also

$$y(t)=\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{2}$$

Beispiel 13.II [V24-270602] Berechne $\mathscr{L}(f)(z)$, wobei

$$f(t)=\begin{cases}t & 0\le t\le 1\\ 1 & t>1\end{cases}$$

$z\in\mathbb{C}$ und $\Re(z)>0$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 e^{-zt}t\,\mathrm{d}t+\int_1^\infty e^{-zt}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{e^{-zt}t}{-z}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^{-zt}}{-z}\,\mathrm{d}t+\left[\frac{e^{-zt}}{-z}\right]_1^\infty\\ &= \frac{e^{-z}}{-z}-\left[\frac{e^{-zt}}{z^2}\right]_0^1+\frac{e^{-z}}{z}\\ &= \frac{e^{-z}}{-z}-\frac{e^{-z}}{z^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{e^{-z}}{z}\\ &= \frac{1-e^{-z}}{z^2}\end{aligned}$$

womit $\sigma_f=0$

Beispiel 13.III Sei f ein p-periodischer Evau, $f(t) = f(t+p)$, $p > 0 \;\forall\; t \geq 0$. Berechne $\mathscr{L}(f)(z)$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kp}^{(t+1)p} e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

u:= t-kp

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^p e^{-z(u+kp)} f(u+kp)\,\mathrm{d}u \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-zkp}\right) \int_0^p e^{-zu} f(u)\,\mathrm{d}u := \psi
\end{aligned}$$

Setzen wir $w = e^{-zp}$, so erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^k = \frac{1}{1-w}$$

woraus folgt

$$\psi = \frac{\int_0^p e^{-zu} f(u)\,\mathrm{d}u}{1 - e^{-pz}}$$

Offensichtlich ist $\sigma_f \geq 0$

Spezialfall Sei $p = 2$ und f die Rechtecksfunktion *siehe Fig*

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 e^{-zt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{e^{-z}}{-z} + \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

damit wird

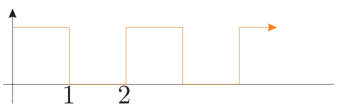
$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f) &= \frac{\int_0^2 e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t}{1 - e^{2z}} \\
&= \frac{1 - e^{-z}}{z(1 - e^{-2z})}
\end{aligned}$$

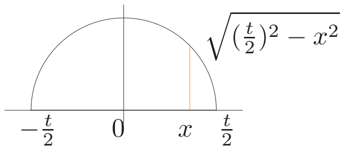
$\sigma_f = 0$

Definition 13.8 Die Faltung von den Evaus f und g ist

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(t-\tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Satz 13.9 Seien f und g zwei Evaus. Dann gilt





1. $f * g = g * f$
2. $\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f) \cdot \mathscr{L}(g)$

Beweis

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f * g)(t) &= \int_0^\infty e^{-zt} \left[\int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau) \right] \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-z\tau} e^{-z(t-\tau)} \int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)\, \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-z(t-\tau)} f(t-\tau)\, \mathrm{d}t \right] g(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-zt} \mathscr{L}(f)(z) g(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\
&= \mathscr{L}(f)(z) \cdot \mathscr{L}(g)(z)
\end{aligned}$$

Beispiel 13.IV Was ist $\mathscr{L}(\sqrt{t})$? Wir definieren

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Die Faltung liefert

$$f(t) * f(t) = \int_0^t \sqrt{\tau(t-\tau)}\, \mathrm{d}\tau$$

$\tau = \frac{t}{2} + x$, $\{-\frac{t}{2} \leq x \leq \frac{t}{2}\}$

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi t^2}{8}$$

Aus Satz 13.9 folgt

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f) \cdot \mathscr{L}(f) &= \mathscr{L}\left(\frac{\pi t^2}{8}\right) \\
&= \frac{\pi}{4z^3}
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f) &= \sqrt{\frac{\pi}{4z^3}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2z^{3/2}}
\end{aligned}$$

Satz 13.10 Sei $F(z) : \mathbb{C}\backslash\{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. $\sigma \in \mathbb{R} : \sigma \geq \Re(z_i)\ \forall\ i\ 1 \leq i \leq n$. $M,\ R,\ \beta > 0$

$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^\beta}$$

wenn $|z| \geq R$, dann gilt

$$f(t) = \sum_{1\leq i\leq m} \left\{\text{Residuum von } e^{zt}F(z) \text{ in } z_i\right\}$$

Sei $f_0(t)$ ein Evau

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \forall\ t \geq 0 \\ 0 & \forall\ t < 0 \end{cases}$$

dann gilt

$$\mathscr{L}(f_0)(z) = F(z)$$

wenn $\Re(z) > \sigma$, $\sigma_f \leq \sigma$

Beispiel 13.V $\mathscr{L}(f)(z) = \frac{1}{z-3}$, was ist f?

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Res} \left.\frac{e^{zt}}{z-3}\right|_{z=3} \\ &= e^{3t} \end{aligned}$$

Korollar 13.11 (Heavisid Expansion Theorie) Seien P, Q Polynome wobei $\deg Q > \deg P$ und $z_1, \ldots, z_n$ einfache Nullstellen von Q sind.

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

und

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=1}^{n} e^{zt}\frac{P(z_i)}{Q'(z_i)}\mathscr{L}(f)(z) \\ &= F(z) \end{aligned}$$

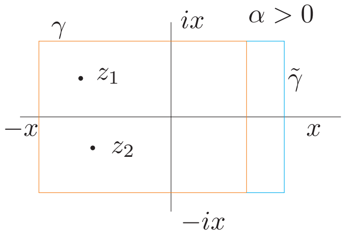
Beispiel 13.VI $\mathscr{L}(f) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$, was ist f? Aus dem Korollar von Heavisid folgt

$$\left.\frac{z}{z+1+z+2}e^{zt}\right|_{z=-1} + \left.\frac{z}{z+1+z+2}e^{zt}\right|_{z=-2}$$

also ist $f = -e^{-t} + 2e^{-2t}$

Beispiel 13.VII $\mathscr{L}(f) = \frac{1}{(z+1)^3}$, was ist f? Aus der Inversionsformel folgt

$$f(t) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{(z+1)^3}\,\middle|\, z = -1\right)$$



Taylorentwicklung von e^{zt} in $z = -1$

$$e^{-t} + (z+1)\left(te^{zt}\big|_{z=-1}\right) + \frac{(z+1)^2}{2!}\left(t^2e^{zt}\big|_{z=-1}\right) + \cdots +$$

Laurententwicklung von $\frac{e^{zt}}{(z+i)^3}$

$$\begin{aligned}\frac{e^{zt}}{(z+i)^3} &= \frac{1}{(z+1)^3}\left(e^{-t} - t(z+1)e^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t}(z+1)^2 + \cdots\right)\\ &= \frac{e^{-t}}{(z+1)^3} - \frac{e^{-t}t}{(z+1)^2} + \frac{e^{-t}t^2}{2}\frac{1}{(z+1)} + \cdots\end{aligned}$$

also ist

$$f(t) = \frac{e^{-t}t^2}{2}$$

Wobei die Wachstumskonstante $= p$

[V25-020702] Aus der Residuenformel folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma e^{zt}F(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left(e^{zt}\right)F(z)\big|_{z_j}\\ &= 2\pi i f(t)\end{aligned}$$

Wir berechnen für $\Re(z) > \alpha$

$$\begin{aligned}2\pi i\mathscr{L}(f)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt}\left(\int_\gamma e^{\omega t}F(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}t\\ &= \lim_{r\to\infty}\int_\gamma\left(\int_0^r e^{(\omega-z)t}F(\omega)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\omega\\ &= \lim_{r\to\infty}\int_\gamma\left[\frac{e^{\omega-z}}{\omega-z}F(\omega)\right]_0^r\mathrm{d}\omega\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\gamma e^{(\omega-z)r-1}\omega - zF(\omega)\,\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

$e^{(\omega-z)r} \to 0$, wenn $r \to \infty$

$$\begin{aligned}&= -\int_\gamma\frac{F(\omega)}{\omega-z}\,\mathrm{d}\omega\\ &= \int_{\tilde{\gamma}}\frac{F(\omega)}{\omega-z}\,\mathrm{d}\omega - \int_\Gamma\frac{F(\omega)}{\omega-z}\,\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

Nach der Cauchy Integralformel

$$= 2\pi i F(z) - \int_\Gamma \frac{F(\omega)}{\omega - z}\,\mathrm{d}\omega$$

Errinnerung $\beta > 0$

$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^\beta}$$

wenn $|z| > 0$

Nach Satz 7.2

$$\left|\int_\Gamma \frac{F(\omega)}{\omega - z}\,\mathrm{d}\omega\right| \leq \text{Länge von } \Gamma \max \left|\frac{F(\omega)}{\omega - z}\right|$$

was gegen 0 geht wenn $x \to \infty$

Zusammenfassung

100. Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wenn sie existiert ist die Laplace Transformierte einer Funktion definiert durch

$$\mathscr{L}(f)(z) := \int_0^\infty e^{-zt} f(z)\,\mathrm{d}t \qquad z \in \mathbb{C}$$

101. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist ein Evau, wenn $\exists\, A, B \in \mathbb{R}$, $\forall\, t > 0$, so dass

1. $f(t) = 0$, $\forall\, t < 0$
2. $|f(t)| \leq Ae^{tB}$, $\forall\, t > 0$
3. f ist stückweise stetig.

102. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ein Evau. Dann gilt

i) Es sei $\mathscr{L}(f)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t$. Es gibt ein σ :, $-\infty \leq \sigma < \infty$, so dass

$$\mathscr{L}(f)(z) \begin{cases} \text{konvergiert wenn} & \Re(z) > \sigma \\ \text{divergiert wenn} & \Re(z) < \sigma \end{cases}$$

weiter ist $\mathscr{L}(f)(z)$ holomorph in $\{z \,|\, \Re(z) > \sigma\}$

ii) Es sei $\rho =$ das Infimum von $\{B \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, A > 0 \text{ so dass } |f(t)| \leq Ae^{Bt}\}$. Es gilt $\sigma \leq \rho$.

103. Seien f und g zwei stetige Evau. Wenn

$\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(g)$ dann $f = g$

104. Seien f und g zwei stetige Evau

1. $\mathscr{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathscr{L}(f) + \mu \mathscr{L}(g)$ wobei λ, $\mu \in \mathbb{C}$
2. $g(t) = f(\alpha t)$, $\alpha > 0$ dann

$$\mathscr{L}(g)(z) = \frac{1}{\alpha}\mathscr{L}(f)\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

105. Sei f ein stückweise C^1 Evau, dann gilt für $\Re(z) > \rho_f$

$$\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\right)(z) = z\mathscr{L}(f)(z) - f(0)$$

106. Es sei f ein Evau und

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

dann gilt für $\Re(z) > \max\{0, \rho_f\}$:

$$\mathscr{L}(g)(z) = \frac{\mathscr{L}(f)(z)}{z}$$

107. Sei f ein Evau, $a \in \mathbb{C}$ für $\Re(z) > \rho_f - \Re(a)$ dann gilt

$$\mathscr{L}(g)(z) = \mathscr{L}(f)(z + a)$$

wobei $g(t) = e^{-at}f(t)$

108. Sei f ein Evau, $a > 0$ und $g(f) = f(t - a)$. Dann gilt

$$\mathscr{L}(g)(z) = e^{-az}\mathscr{L}(f)(z)$$

109.

- $f(t) = e^{-at}$

$$\mathscr{L}(f) = \frac{1}{z + a}$$

$\sigma_f = -\Re(a)$

- $f(t) = \cos(at)$

$$\mathscr{L}(f) = \frac{az}{z^2 + a^2}$$

$\sigma_f = |\Im(a)|$

- $f(t) = \sin(at)$
$$\mathscr{L}(f) = \frac{a}{z^2 + a^2}$$
$\sigma_f = |\Im(a)|$
- $f(t) = t^n$
$$\mathscr{L}(f) = \frac{n!}{z^{n+1}}$$
$\sigma_f = 0$

110. Um Differentialgleichugen zu lösen, wenden man die Laplacetransformation auf jeden Summand an, fasst sie als eine Laplacetransformierte zusammen und findet danach die Ursprungsfunktion.

111. Die Faltung von den Evaus f und g ist

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

112. Seien f und g zwei Evaus. Dann gilt

1. $f * g = g * f$
2. $\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f) \cdot \mathscr{L}(g)$

113. Sei $F(z) : \mathbb{C}\backslash\{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. $\sigma \in \mathbb{R} : \sigma \geq \Re(z_i)\ \forall\, i$ $1 \leq i \leq n$. M, R, $\beta > 0$

$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^\beta}$$

wenn $|z| \geq R$, dann gilt

$$f(t) = \sum_{1 \leq i \leq m} \left\{\text{Residuum von } e^{zt}F(z) \text{ in } z_i\right\}$$

Sei $f_0(t)$ ein Evau

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \forall\, t \geq 0 \\ 0 & \forall\, t < 0 \end{cases}$$

dann gilt

$$\mathscr{L}(f_0)(z) = F(z)$$

wenn $\Re(z) > \sigma$, $\sigma_f \leq \sigma$

114. Seien P, Q Polynome wobei $\deg Q > \deg P$ und $z_1, \ldots, z_n$ einfache Nullstellen von Q sind. Die Heavisid Expansion Theorie sagt aus:

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

und

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=1}^{n} e^{zt} \frac{P(z_i)}{Q'(z_i)} \mathscr{L}(f)(z) \\ &= F(z) \end{aligned}$$

14 ZUSATZ

Satz 14.1 (Indentitätsprinzip) Seien $f, g : A \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen und A ein Gebiet. z_0, $z_1 \in A$.

$$\lim_{k\to\infty} z_k = a \in A$$

und

$$f(z_k) = g(z_k) \qquad \forall\, k > 0$$

wobei $z_i \neq z_j$ wenn $i \neq j$. Dann gilt $\forall\, z \in A$

$$f(z) = g(z)$$

Diese Aussage gilt *nicht* für eine reell differenzierbare Funktion.

Beweis Sei $a(z) = f(z) - g(z)$ und $A_0 = \{a_0 \in A \mid \Im(z) = 0$ in einer Umgebung von $a_0\ \}$

- A_0 ist offen, aus Definition.
- A_0 ist abgeschlossen in A

Wenn A_0 die beiden Aussagen erfüllt, dann ist $A_0 = A$. Sei $b \in A$ und ω_1, ω_2, $\ldots$, $\in A_0$

$$\lim_{k\to\infty} w_k = b \in A$$

$h(w_k) = 0$. Reductio ad absurdum: $h(z)$ verschwindet nicht überall in einer Umgebung von b. Der Satz von Taylor sagt

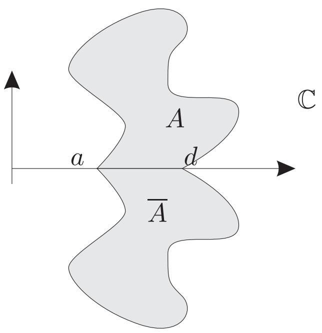
$$h(z) = a_{k_0}(z-b)^{k_0} + a_{k_0+1}(z-b)^{k_0+1} + \cdots$$

$a_{k_0} \neq 0$, daraus folgt

$$h(z) = (z-b)^{k_0}\phi(z)$$

wobei $\phi(z) = a_{k_0} + a_{k_0+1}(z-b) + \cdots$ und somit im Punkt b nicht verschwindet. Das heisst es gibt eine punktierte[§] Umgebung wo $h(z)$ nicht verschwindet, da $h(z)$ stetig ist. Was ein Widerspruch ist. Da A_0 nicht leer ist, aus Hypothese, muss $A_0 = A$ sein.

[§] Das heisst, b ist ausgenommen



Satz 14.2 (Schwarzscher Spiegelungssatz) [V26-040702] Sei A ein Gebiet. $\mathrm{Rand}(A) \cap \mathbb{R}$ sei $[a, b]$ wobei $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sei weiter $f : A \cup [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. $f|A : A \to \mathbb{C}$ sei analytisch und reelwertig. Wir definieren

$$\overline{A} := \{\overline{z} \in \mathbb{C} | z \in A\}$$

und $g : A \cup\,]a, b[\cup \overline{A} \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in A \cup]a, b[\\ f(\overline{z}) & z \in \overline{A} \end{cases}$$

dann ist $g(z)$ holomorph.

Satz 14.3 (Casorati-Weierstrass) Sei $f : A \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$, wobei A offen und $\subseteq \mathbb{C}$. In a hat f eine wesentliche Singularität. Dann existiert eine Folge $z_0, z_1, \ldots,$ so dass

$$\lim_{k \to \infty} z_k = a$$

und

$$\lim_{k \to \infty} f(z_k) = w$$

wobei $w \in \mathbb{C}$

Beweis *Per Absurdum.* $\exists\, \varepsilon > 0$ so dass $|f(z) - w| \geq \varepsilon\ \forall\, z \in U$, $z \neq a$, wobei U eine offene Umgebung von a ist. Es sei

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

$g(z)$ ist in $U \backslash \{a\}$ holomorph und beschränkt, weil

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \frac{1}{|f(z) - w|} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Die Singularität von $g(z)$ ist also hebbar, also ist $g(z)$ in U holomorph. Weiter hat g eine Nullstelle endlicher Ordnung in a, wegen dem Satz von Taylor und dem Identitätsprinzip. Also hat

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

eine Polstelle endlicher Ordnung, was ein Widerspruch ist.

Satz 14.4 (Picard) Sei A offen, $f : A\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und U eine offene Umgebung von a. In a hat f eine wesentliche Singularität. Für alle $w \in \mathbb{C}$, bis auf einen Wert, hat die Gleichung

$$f(z) = w$$

unendlich viele Lösungen in $U\backslash\{a\}$

Beispiel 14.I $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, also ist $a = 0$. Die Reihenentwicklung liefert

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$

Sei zum Beispiel $w = 1$, also $e^{\frac{1}{z}} = 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= 2\pi ik \qquad\qquad k \in \mathbb{Z} \\ z &= \frac{1}{2\pi ik} \end{aligned}$$

also unendlich viele Lösungen. Die Ausnahme ist $w = 0$, denn die Gleichung $e^{\frac{1}{z}} = 0$ hat keine Lösung.

Satz 14.5 Sei $f : A\backslash\{b_1, \ldots, b_n\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, A ein Gebiet und b_0 bis b_m die Polstellen von f, a_0 bis a_n die Nullstellen von $f \in A$ wobei a_i und b_i mit Multiplizitäten. Sei $\gamma : [a,b] \to A\backslash\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ eine geschlossene, nullhomologe Kurve in A. Dann gilt

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \eta(\gamma, a_k) - \sum_{l=1}^{m} \eta(\gamma, b_l) \right)$$

Beweis Sei

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

$g : A\backslash\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\} \to \mathbb{C}$ eine nullholomorphe Funktion. Sei k_1 ist die Ordnung der Nullstelle a_1.

$$f(z) = c_{k_1}(z - a_1)^{k_0} + c_{k_1+1}(z - a_1)^{k_1+1} + \cdots$$

$c_{k_1} \neq 0$. Für die Ableitung gilt somit

$$f'(z) = k_1 c_{k_1}(z - a_1)^{k_1-1} + \cdots$$

damit erhalten wir

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_1 c_{k_1}(z-a_1)^{k_1-1)} - \cdots}{c_{k_1}(z-a)^{k_1} + \cdots}$$

Bilden wir den Grenzwert

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a_1}(z-a_1)\frac{f'(z)}{f(z)} &= \lim_{z\to a_1}\frac{k_1 c_{k_1}(z-a_1)^{k_1}+\cdots}{c_{k_1}(z-a_1)^k_1+\cdots} \\
&= \lim_{z\to a_1}\frac{k_1 c_{k_1}+(\cdots)}{c_{k_1}+(\cdots)} \\
&= k = \operatorname{Res}(g(z)|_{z=a_1}
\end{aligned}$$

Ähnlich

$$\operatorname{Res}\frac{f'(z)}{f(z)}\bigg|_{z=a_j} = k_j$$

wobei k_j die Multiplizität von a_j ist.
Sei nun l_1 die Ordnung der Polstelle b_1

$$f(z) = \frac{d_{-l_1}}{(z-b_1)^{l_1}} + \frac{d_{-l_1+1}}{(z-b_1)^{l_1+1}} + \cdots$$

$d_{-l_1} \neq 0$. Für die Ableitung gilt somit

$$f'(z) = \frac{-l_1 d_{-l_1}}{(z-b_1)^{l_1+1}} + \cdots$$

Bilden wir den Grenzwert

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to b_1}\frac{f'(z)}{f(z)}(z-b_1) &= \lim_{z\to b_1}\frac{\frac{-l_1 d_{-l_1}(z-b_1{}^{l_1}}{+}\cdots}{\frac{d_{-l_1}}{(z-b_1)^{l_1}}+\cdots} \\
&= \frac{-l_1 d_{-l_1}}{d_{-l_1}} \\
&= -l_1
\end{aligned}$$

also

$$\operatorname{Res}\frac{f'(z)}{f(z)}\bigg|_{z=b_1} = -l_1$$

Der Residuensatz liefert

$$\begin{aligned}
\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i\sum \eta(\gamma,z)\operatorname{Res}(g,z) \\
&= 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{n}\eta(\gamma,a_k) - \sum_{l=1}^{m}\eta(\gamma,b_l)\right)
\end{aligned}$$

Korollar 14.6 (Rouché) Seien $f, g : A\backslash\{z_0, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, wobei $z_0, \ldots, z_n$ Polstellen sind. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine nullhomologe Kurve in A, γ trifft keine Polstelle oder Nullstelle von f, g. Wir definieren

$$Z_f = \sum_{\substack{z \text{ Null-} \\ \text{stelle von} \\ f}} \eta(\gamma, z)$$

und

$$P_f = \sum_{\substack{z \text{ Polstel-} \\ \text{le von } f}} \eta(\gamma, z)$$

Analog dazu Z_g, P_g ähnlich. Wenn

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \qquad \star$$

Dann gilt

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g$$

Beweis Wenn $z \in \gamma$ ist $\star$

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| < 1$$

Wir definieren

$$h(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$$

Also ist $h(\gamma) \subseteq D_1(1)$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} \,\mathrm{d}z &= \int_a^b \frac{h'\big(\gamma(t)\big)}{h\big(\gamma(t)\big)} \gamma'(t) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(h(\gamma(t))\big)}{h\big(\gamma(t)\big)} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{h(\gamma)} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z \\
&= \eta\big(h(\gamma), 0\big) 2\pi i = 0
\end{aligned}$$

Aber

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}$$

daraus folgt

$$\int_\gamma \left(\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \mathrm{d}z = 0$$

also

$$Z_g - P_g = Z_f - P_f$$

wegen Satz 14.5.

Beispiel 14.II Sei $f : A \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{D_1(0)} \subseteq A$. Falls $0 < |f(z)| < 1$ wenn $|z| = 1$ dann $\exists\, z_0 \in D_1(0)$ mit $f(z_0) = z_0$ wobei z_0 eindeutig ist, da

$$\big|z - |z - f(z)|\big| < |z|$$

Zusammenfassung

115. Seien $f, g : A \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen und A ein Gebiet. $z_0,\, z_1 \in A$.

$$\lim_{k\to\infty} z_k = a \in A$$

und

$$f(z_k) = g(z_k) \qquad\qquad \forall\, k > 0$$

wobei $z_i \neq z_j$ wenn $i \neq j$. Dann gilt $\forall\, z \in A$

$$f(z) = g(z)$$

116. Sei A ein Gebiet. Rand$(A) \cap \mathbb{R}$ sei $[a, b]$ wobei $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sei weiter $f : A \cup [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. $f|A : A \to \mathbb{C}$ sei analytisch und reelwertig. Wir definieren

$$\overline{A} := \{\overline{z} \in \mathbb{C} | z \in A\}$$

und $g : A\cup\,]a, b[\cup \overline{A} \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in A\cup]a, b[\\ f(\overline{z}) & z \in \overline{A} \end{cases}$$

dann ist $g(z)$ holomorph.

117. Sei $f : A\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$, wobei A offen und $\subseteq \mathbb{C}$. In a hat f eine wesentliche Singularität. Dann existiert eine Folge $z_0, z_1, \ldots,$ so dass

$$\lim_{k\to\infty} z_k = a$$

und

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = w$$

wobei $w \in \mathbb{C}$

118. Sei A offen, $f : A\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und U eine offene Umgebung von a. In a hat f eine wesentliche Singularität. Für alle $w \in \mathbb{C}$, bis auf einen Wert, hat die Gleichung

$$f(z) = w$$

unendlich viele Lösungen in $U\backslash\{a\}$

119. Sei $f : A\backslash\{b_1, \ldots, b_n\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, A ein Gebiet und b_0 bis b_m die Polstellen von f, a_0 bis a_n die Nullstellen von $f \in A$ wobei a_i und b_i mit Multiplizitäten. Sei $\gamma : [a, b] \to A\backslash\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ eine geschlossene, nullhomologe Kurve in A. Dann gilt

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \eta(\gamma, a_k) - \sum_{l=1}^{m} \eta(\gamma, b_l)\right)$$

120. Seien $f, g : A\backslash\{z_0, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, wobei $z_0, \ldots, z_n$ Polstellen sind. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine nullhomologe Kurve in A, γ trifft keine Polstelle oder Nullstelle von f, g. Wir definieren

$$Z_f = \sum_{\substack{z \text{ Null-}\\ \text{stelle von}\\ f}} \eta(\gamma, z)$$

und

$$P_f = \sum_{\substack{z \text{ Polstel-}\\ \text{le von } f}} \eta(\gamma, z)$$

Analog dazu Z_g, P_g ähnlich. Wenn

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \qquad \star$$

Dann gilt

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g$$

Index

2π-periodisch, 52
C^1, 18
L^1, 62
Ω-bandbegrenzt, 66
$\frac{1}{z}$, 23
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$, 12
$\gamma : [a, b] \to A$, 22
∞, 9
π Bandbegrenztheit, 67
ρ, 74, 83
σ, 74, 83
$f'(z_0)$, 12

Abbildungen
  konforme, 18
abgeschlossene komplexe Ebene, 9
Ableitung, 12
Absolutbetrag, 4
Achse, 3
allgemeine Integralformel, 44
analytisch, 12
analytische Geometrie, 11
Anwendung der Integralformel, 29
approximieren, 52
Argument, 5
Axiome, 3

bandbegrenzte Signale, 66

Casorati-Weierstrass, 87
Cauchy I, 21
Cauchy Integralformel, 83
Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen, 13, 14, 16–18
Charakter, 69
Copyright, 1

Deutung der Ableitung, 13
Differentialgleichung, 77
Differentialgleichungen
  Cauchy-Riemannsche, 13, 14, 16–18
  Mehrdimensionale, 13
diskrete Fourieranalysis, 69

Ebene, 15
Eigenschaften von $\mathbb{C}$, 4
eindeutiges Element, 3
Eindeutigkeit, 63
Eindeutigkeitsaussage, 31
einfach zusammenhängend, 20
einfacher Pol, 40
Einheitskreis, 22
Einheitsscheibe, 20
erster Verschiebungssatz, 75
Erweiterung der reellen, 3
Evau, 74
Exponential- und Logarithmusfunktion, 7
Exponentialfunktion, 7

Faltung, 79
Folge
  von Vektoren, 7
Fourier Integrale, 48
Fourieranalysis
  diskrete, 69
Fourierkoeffizienten, 53, 57, 69, 72
Fourierreihe, 52
Fouriertransformation, 62
  schnelle, 71
Fundamentalsatz der Algebra, 3, 8
Funktionen
  analytische, 12
  Exponential, 7
  Hyperbolische, 10
  lineare, 13
  Logarithmus, 7
  rationale, 13, 47
  Stamm, 22
  trigonometrische, 10
  Umkehr, 14, 17

Gauss, 34
Gebiet, 12
Geometrie, 11
Geometrische Deutung von + und $\cdot$, 5
geometrische Reihe, 30
Gerade, 11
geschlossen, 22
Glockenkurve, 64

Hauptwert, 5
Heavisid Expansion Theorie, 81
hebbare Singularität, 37, 39
holomorph, 12, 16
holomorphe Funktion, 24
Holomorphie, 25
Hyperbolisch Trigonometrischen Funktionen, 10

Identität, 17
Imaginärteil, 4
Indentitätsprinzip, 86
infinitesimal reell differenzierbar, 14
Integralformel
  allgemeine, 44
Integralformel von Cauchy, 26
Integration durch komplexe Gebiete, 44
Inverse, 3
inverse Fourier Transformierte, 65
inverse Fouriertransformierte, 66
Inversionsformel, 62, 67, 81
isolierte Singularität, 37
Isomorphismus, 14

Joukowski Funktion, 20

Kettenregel, 13, 14, 17, 19
Knickpunkte, 22
Kompaktifizierung, 9
komplex Konjugierte, 5
komplexe Linienintegrale, 21
komplexe Vektorraum, 70
Komplexe Zahlen, 3
komplexen Vektorraum, 69
Komposition, 11
konform, 19
  äquivalent, 20
konstant, 19, 34
Konvergenz
  der Laurent Entwicklung, 38
  gleichmässige, 57
  von komplexen Zahlen, 7, 10
Konvergenzradius, 31, 46
konvex, 24, 45
konvexes Gebiet, 24
Kreis, 11
Kreisscheibe, 31
Kurven in $\mathbb{C}$, 18

Löcher, 20
Laplace Transformation, 74
Laplace Transformierte, 74, 76
Laurent Entwicklung, 36, 38
Laurententwicklung, 82
Leibnitzsche Regel, 29
lineare Algebra, 71
Linienintegral
  komplexes, 21
Liouville, 33
Logarithmusfunktion, 7

Möbiusfunktion, 11, 20
Matrixform, 14, 18
Multiplikation, 3
  mit einer komplexen Zahl, 15

nicht zusammenhängend, 12
Norm, 4
nullhomolog, 44
Nullstelle, 37, 43
Nullstelle $k-$ter Ordnung, 40

obere Halbebene, 20
offen, 12
orthonormale Basis, 70

parametrisierte Gerade, 23
Parseval, 65
Partialbruchzerlegung, 78
partielle Ableitung, 14, 18
partielle Integration, 54
Pendelgleichung, 77
Plancherel, 65
Pol
  der Ordnung m, 39
  einfacher, 40
Polstelle, 37, 43, 50
Polynome, 50
Potenzieren, 8
Potenzreihe, 30
Punkt im Unendlichen, 9

Radizieren, 8
Rand, 30, 31
Randpunkte, 26
Realteil, 4
Rechtecksfunktion, 79
reelle Differenzierbarkeit, 15

Reihe, 7
- Cosinusreihe, 58
- Fourier, 52
- geometrische, 30, 32
- Laurent, 36
- Potenz, 30
- Sinusreihe, 58
- Taylor, 30, 32

Residuenformel, 82
Residuensatz, 44, 45, 48
Residuum, 37, 38, 40, 43, 64
Riemann integrierbar, 62
Riemannsche Zahlenkugel, 9
Riemannscher Abbildungssatz, 20
Rouché, 90

Satz
- Fundamental- der Algebra, 33
- erster Verschiebungssatz, 75
- Hebbarkeit, 29
- Konvergenz, 74
- lokaler- vom Minimum, 34
- Potenzreihe, 31
- Residuen, 44
- Residuensatz, 45
- Schwarzscher Spiegelungssatz, 87
- von Casorati-Weierstrass, 87
- von Cauchy I, 21, 26
- von Gauss, 34
- von Liouville, 33
- von Parseval, 60
- von Parseval-Plancherel, 65
- von Rouché, 90
- von Stokes, 26
- zweiter Verschiebungssatz, 76

schnelle Fouriertransformation, 71
Schwarzscher Spiegelungssatz, 87
Serie 8 Übung 5, 56
Sincfunktion, 39, 66
Singularität, 22, 33, 48
- hebbare, 37, 39
- isolierte, 37
- wesentliche, 37, 41, 43

Skalarprodukt, 54, 70
Spähre, 10
stückweise C^1, 18
Stammfunktion, 21, 22
stereographische Projektion, 10
Streckungen, 11
Summme, 3
$\mathbb{C}$, 3
System der komplexen Zahlen, 3

Taylorentwicklung, 82
Taylorreihe, 30
Todor, 37
Translationen, 11
Trapezformel, 69
trigonometrische Formeln, 22
trigonometrische Funktionen, 10

Umfang, 25
Umlaufzahl, 26, 44

Vektorraum, 54
Verknüpfungen, 3
Viereck, 24

Wachstumskonstante, 82
Wegunabhängigkeit, 22, 23
wesentliche Singularität, 37, 43
winkeltreu, 19

Zahlenkugel, Riemannsche, 9
zusammenhängend, 12
zusammenziehbar, 44
zweiter Verschiebungssatz, 76
Zyklus, 44