Johannes Bader

Analysis I & II

Oktober 2001 - Juli 2002

Das Dokument entstand aus der Mitschrift der Vorlesung Analysis I & II, Niveau I bei Prof. Salamon im ersten Jahr an der ETH. Die Nummerierung von Sätzen, Lemmata, Korollaren sowie Beispieln erfolgte abweichend von der Vorlesung durchgehend. Die Kreuzreferenzierungen wurden übernommen.

Dieses Dokument wurde mit LaTeX gesetzt. Die Vorlesungen von Analysis I wurden zum Teil leicht verändert, um sie mit der Mitschrift Analysis II kompatible zu machen.

Version 1s 1.0, 7. Februar 2002

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Grundlagen

1. Logik & Mengen

Definition: [V1-291001] Eine *Aussage* ist eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist.

Beispiel 1.1:

$$\begin{array}{lcll} A & := & „1+1=3“ & \mathbf{f} \\ B & := & \text{„Die Winkelsumme eines Dreiecks beträgt180“} & \mathbf{w} \end{array}$$

Logik der Aussagen:

$\wedge$und

$\vee$oder (= und oder)

$\neg$nicht

$\Rightarrow$impliziert (hat zur Folge)

$\Leftrightarrow$gilt genau dann, wenn

:=definiert durch

Beispiel 1.2: $A = \mathbf{f}$, $B = \mathbf{w}$

$$\begin{array}{rclrclrcl} A \wedge B & = & \mathbf{f} & A \vee B & = & \mathbf{w} & A \Rightarrow B & = & \mathbf{w} \\ \mathbf{f} \wedge \mathbf{w} & = & \mathbf{f} & \mathbf{f} \vee \mathbf{w} & = & \mathbf{w} & \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{w} & = & \mathbf{w} \end{array}$$

A	B	A $\Rightarrow$ B
w	**w**	**w**
w	**f**	**f**
f	**w**	**w**
f	**f**	**w**

Definition: Eine *Aussageform* ist ein Test $A(x)$ mit einer oder mehreren freien Variablen x, der für jeden Wert von x in eine wahre oder falsche Aussage übergeht.

Beispiel 1.3:

$$\begin{array}{rcll} A(x) & := & x^2 = 7 & x \text{ frei} \begin{cases} \text{wahr,} & \text{für } x = \pm\sqrt{7} \\ \text{falsch,} & \text{alles andere} \end{cases} \\ B(x) & := & 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} & n \text{ frei} \begin{cases} \text{wahr,} & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \text{falsch,} & \text{für keinen Fall} \end{cases} \\ C(x,y) & := & x \cdot y = 0 & x, y \text{ frei} \begin{cases} \text{wahr,} & \text{für } x = 0 \text{ und/oder } y = 0 \\ \text{falsch,} & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

QUANTOREN:

$$\begin{aligned} \forall &:= \text{“für alle“} \\ \exists &:= \text{“es gibt, es existiert“} \\ \exists\,! &:= \text{“es gibt genau ein“} \\ \nexists &:= \text{“es gibt kein“} \end{aligned}$$

Beispiel 1.4: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{n})$ **w**
$\exists\, !n \in \mathbb{N} \quad (n^2 = 676)$ **w**
$\exists\, x \quad \forall\, y \quad (x \cdot y = 0)$ **w** $\quad \triangle$
Wir nehmen $x := 0$, und dann $\forall\, y \quad (0 \cdot y = 0)$ **w**

BEMERKUNG: In $\triangle$ ist x ist frei und y gebunden.

MENGEN:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &:= \{1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{Z} &:= \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots\} \\ \mathbb{Q} &:= \{1/2, n/m \mid n \in \mathbb{Z}, m \in N\} \\ \mathbb{R} &:= \text{Menge der reellen Zahlen} \\ \mathbb{C} &:= \text{Menge der komplexen Zahlen} \end{aligned}$$

Aber auch eigene Mengendefinitionen möglich, z.B. $\mathbb{S} := \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1^2\}$

Definition: $x \in A$. Das Objekt x ist Element der Menge A

Lemma 1: $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist.

Beweis: Angenommen, die Aussage ist wahr

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \exists\, x \in \mathbb{Q}, \text{ so dass } x^2 = 2 \\ &\Rightarrow \quad \exists\, p \in \mathbb{Z},\ \exists\, q \in \mathbb{N} \text{ so dass } \tfrac{p^2}{q^2} = 2 \end{aligned}$$

Durch Kürzen können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass nicht beide, p und q, gerade sind, aber $p^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow p^2$ gerade $\Rightarrow p$ gerade $\Rightarrow p^2$ ist durch 4 teilbar $\Rightarrow q^2$ ist durch 2 teilbar $\Rightarrow q$ gerade !

2. ℝ = Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen. Sie hat folgende Eigenschaften:

1. KÖRPERAXIOME: Für $\mathbb{R}$ gelten die Rechenregeln der 4 Grundrechnungen $(+, -, *, \div)$

Addition: Zwei reele Zahlen x,$y \in \mathbb{R}$ wird die Zahl $x + y \in \mathbb{R}$ zugeordnet, so dass gilt:

Kommutativgesetz:	$x + y$	$=$	$y + x$	$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$
Assoziativgesetz:	$(x + y) + z$	$=$	$x + (y + z)$	$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$
neutrales Element:	$x + 0$	$=$	x	$\forall\, x \in \mathbb{R}$
inverses Element:	für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $-x \in \mathbb{R}$, so dass			
	$x + -x$	$=$	0	

Multiplikation: Je zwei reellen Zahlen x, $y \in \mathbb{R}$ wird eine Zahl $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zugeordnet, so dass

$$\begin{array}{llcll}
\textit{Kommutativgesetz:} & x \cdot y & = & y \cdot x & \forall\, x, y \in \mathbb{R} \\
\textit{Assoziativgesetz:} & (x \cdot y) \cdot z & = & x \cdot (y \cdot z) & \forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \\
\textit{neutrales Element:} & \multicolumn{4}{l}{\text{Es gibt ein Element 1, so dass}} \\
 & x \cdot 1 & = & x & \forall\, x \in \mathbb{R} \\
\textit{inverses Element:} & \multicolumn{4}{l}{\text{für jedes } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ gibt es ein } x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}, \text{ so dass}} \\
 & x \cdot x^{-1} & = & 1 &
\end{array}$$

Distributivgesetz: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

2. Ordnungsaxiome: Der Körper der reellen Zahlen ist geordnet, d.h. für je zwei reelle Zahlen x, $y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei folgenden Gleichungen:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

Die Ordnungsrelation hat folgende Eigenschaften

- $x < y,\ y < z \Rightarrow x < z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$
- $x < y,\ z \in \mathbb{R} \Rightarrow x + z < y + z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$
- $x < y,\ z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

3. Vollständigkeitsaxiom: Falls A, $B \subset \mathbb{R}$ Teilmengen sind mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{A \cup B = \mathbb{R},\ A \cap B = \emptyset, \quad A \neq \mathbb{R},\ B \neq \emptyset \text{ und umgekehrt}} \\
a \in A, & a' < a & \Rightarrow a' \in A \\
b \in B, & b' > b & \Rightarrow b' \in B
\end{array}$$

dann gibt es genau ein Element $x \in \mathbb{R}$ so dass gilt: $a \leq x \quad \forall\, a \in A, \quad b \geq x \quad \forall\, b \in B$. Unvollständig wäre zum Beispiel:

$$\begin{array}{rcl}
A & = & \{x \in \mathbb{Q} | x < \sqrt{2}\} \\
B & = & \{x \in \mathbb{Q} | x > \sqrt{2}\} \\
\text{unvollständig} \leftarrow \mathbb{Q} & = & A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset
\end{array}$$

Bemerkungen:

- Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen erfüllt alle Körper- & Ordnungsaxiome, aber nicht das Vollständigkeitsaxiom.
- Das Symbol $x \leq y$ bedeutet, dass entweder $x < y$ oder $x = y$.
- Dass ein geordneter Körper existiert, der alle diese Eigenschaften erfüllt, ist ein Satz, den wir nicht beweisen werden.
- Alle weiteren Rechenregeln, die für die reellen Zahlen gelten, lassen sich aus den genannten Axiomen herleiten

Beispiel 1.5:

$$\begin{array}{lcl}
x < y, z < 0 & \Rightarrow & x \cdot z > y \cdot z \ ? \\
x < y, z < 0 & \Rightarrow & 0 = z + (-z) < 0 + (-z) = -z \\
 & \Rightarrow & x \cdot (-z) < y \cdot (-z) \\
 & \Rightarrow & -xz < -yz \\
 & \Rightarrow & \underbrace{-xz + (xz + yz)}_{y \cdot z} < \underbrace{-yz + (xz + yz)}_{x \cdot z} \qquad \square
\end{array}$$

Beispiel 1.6: $0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ ohne Beweis

3. Begriffe

SCHREIBWEISE:

Mengen	Logik	Beispiel
$A \subset B$	$\Rightarrow$	$x \in A \Rightarrow x \in B$
$A \cap B$	$\wedge$	$A \cap B = \{x \vert x \in A \wedge x \in B\}$
$A \cup B$	$\vee$	$A \cup B = \{x \vert x \in A \vee x \in B\}$
$X \backslash A$	$\neg$	$X\backslash A = \{x \in X \vert x \neq A\} = \{x \in X \vert \neg x \in A\}$

SUMMEN- & PRODUKTZEICHEN: $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{r=1}^{n} x_r := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\prod_{r=1}^{n} x_r := x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Beispiel 1.7: $x_k = a^n \qquad a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k := \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Beweis:

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \qquad (1) \\ a \cdot S_n & = & a + a^2 + \cdots \quad \cdots + a^{n+1} \qquad (2) \quad \big|\big((1) - (2)\big) \div (1-a) \\ S_n & = & \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{rcl} (1-a) \cdot S_n & = & \sum_{k=0}^{n} (1-a) \cdot a^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} \\ & = & \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k'=1}^{n+1} a^{k'} \quad = \quad 1 - a^{n+1} \end{array}$$

Beispiel 1.8:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

4. Die Binominal Koeffizienten

Fakultät: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (1)

Satz 1: $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k y^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der $k-$elementigen Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, n\}$

BEMERKUNG: $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &\overset{?}{=} \binom{n+1}{k}\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n+1-k)!}\cdot\big(k+(n+1-k)\big) = \frac{n!}{k!(n+1-k)!}\cdot(n+1)\\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \quad \square\end{aligned}$$

5. Vollständige Induktion

[V2-011101] Wir wollen beweisen, dass eine mathematische Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ stimmt. Dazu zeigen wir

1. INDUKTIONSVERANKERUNG: $A(n)$ gilt für $n = 1$

2. INDUKTIONSSCHRITT: Wenn $A(n)$ gilt, gilt auch $A(n+1) \Rightarrow A(n)$ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Im Satz 1 ist die Aussage $A(n)$ folgende: $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k y^{n-k}$$

1.: $n = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x^k\cdot y^{1-k} = \binom{1}{0}x^0\cdot y^1+\binom{1}{1}x^1\cdot y^0 = x+y$

2.:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} = (x+y)^n\cdot(x+y) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\cdot(x+y)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}\cdot y^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\cdot y^{n+1-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\cdot x^k\cdot y^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\cdot y^{n+1-k}\\ &= x^{n+1}+y^{k+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)\cdot x^k\cdot y^{n+1-1}\\ &= x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\cdot x^k\cdot y^{n+1-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k\cdot y^{n+1-k} \quad \square\end{aligned}$$

6. Indirekter Beweis

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ x\cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$. Aussage $A := x\cdot y = 0$; Aussage $B := x = 0,\ y = 0$
$A \Rightarrow B$ entspricht $\neg B \Rightarrow \neg A$
Warum? $A \Rightarrow B$ heisst $\neg A \vee B \Leftrightarrow B \vee \neg A \Leftrightarrow \neg\neg B \vee \neg A \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

7. Wahrheitstafeln

$A \Rightarrow B$:

$B\backslash A$	**w**	**f**
w	**w**	**w**
f	**f**	**w**

$\neg B \Rightarrow \neg A$:

$B\backslash A$	**w**	**f**
w	**w**	**w**
f	**f**	**w**

8. Fallunterscheidung

Beweis $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$: Äquivalente Aussage $x \neq 0$ und $y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0$
Beweis mit vier Fällen:

$$\left.\begin{array}{lll} x > 0, \quad y > 0 & \Rightarrow & x \cdot y > 0 \\ x < 0, \quad y > 0 & \Rightarrow & x \cdot y < 0 \\ x > 0, \quad y < 0 & \Rightarrow & x \cdot y < 0 \\ x < 0, \quad y < 0 & \Rightarrow & x \cdot y > 0 \end{array}\right\} \text{Ordnungsaxiom:} \quad \begin{array}{rcccc} x \cdot y & > & 0 \cdot y & = & 0 \\ \text{oder } x \cdot y & < & 0 \cdot y & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 \cdot y &= (0+0)y = 0 \cdot y + 0 \cdot y \\ 0 \cdot y + (-0 \cdot y) &= 0 \cdot y + 0 \cdot y + (-0 \cdot y) \\ 0 &= 0 \cdot y + 0 \end{aligned}$$

Zu $\neq B$:

$$\begin{aligned} B &= B_1 \vee B_2 \\ \neg B &= \neg(B_1 \vee B_2) = \neg B_1 \wedge \neq B_2 \end{aligned}$$

Satz 2: $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x > 0\ \exists\,!\ y > 0$ so dass $y^n = x$

Bezeichnung:
$\sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}} = y$
$\exists\,! :=$ existiert genau ein

Beweis der Eindeutigkeit: Seien $y > 0$, $z > 0$ so dass $y^n = z^n = x$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{y^n}{z^n} = 0 \Rightarrow 0 = 1 - \left(\frac{y}{z}\right)^n &= \left(1 - \frac{y}{z}\right) \cdot \left(1 + \frac{y}{z} + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{y}{z}\right)^{n-1}\right) \\ &\Rightarrow 1 - \frac{y}{z} = 0 \text{ oder } \left(1 + \frac{y}{z} + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{y}{z}\right)^{n-1}\right) = 0 \\ &\Rightarrow 1 - \frac{y}{z} = 0 \Rightarrow y = z \end{aligned}$$

Beweis der Existenz: Sei $x > 0$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{a \in \mathbb{R}\ | a^n \leq x \text{ oder } a \leq 0\} \\ \mathcal{B} &:= \{b \in \mathbb{R}\ | b^n > x \text{ und } b > 0\} \end{aligned}$$

Die Mengen $\mathcal{A}$ & $\mathcal{B}$ erfüllen die Voraussetzungen des Vollständigkeitsaxiom. $\Rightarrow \exists\ y \in \mathbb{R}$ so dass $a \leq y \quad \forall\, a \in \mathcal{A}$, $b \geq y \quad \forall\, b \in \mathcal{B}$ $\square$

Behauptung: $y^n = x$

Annahme: $y^n \neq x$ dann gilt $y^n < x$ oder $y^n > x$
Erster Fall $y^n < x$

$y \leq 0$**:** Wähle $\varepsilon > 0$ so dass $\varepsilon^n < x$. Darum ist $\varepsilon \in \mathcal{A}$ und $y \leq 0 < \varepsilon$ Widerspruch

$y > 0$**:** $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ so dass $(y+\varepsilon)^n = y^n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k \cdot y^{n-k}}_{\varepsilon \text{ so wählen, dass} < x - y^n} < x \Rightarrow y + \varepsilon \in \mathcal{A}!$.

Den Zweiten Fall, $y^n > x$, ist mit ähnlicher Beweisführung und

$$(y+\varepsilon)^n = y^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \varepsilon^k \cdot y^{n-k} < x$$

zu zeigen.

$x_1, \dots, x_n > 0$ [V3-051101]

arithmetisches Mittel: $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$ (2)

geometrisches Mittel: $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n}$ (3)

Satz 3: $\forall\, x_1, \dots, x_n > 0$

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

BEMERKUNG: $n = 2$. $\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

$$\left.\begin{array}{l} a := \sqrt{x_i} \\ b := \sqrt{x_2} \end{array}\right\} a \cdot b \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \quad \square$$

Lemma 2: Sei $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Sei $q = \frac{p}{p-1}$. Dann gilt für alle $a, b > 0$

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \qquad (2)$$

BEMERKUNG:

(i) $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$

(ii) Das Lemma gilt sogar für beliebige reelle Zahlen $p > 1$

Beweis Lemma 2: Es sei

$$c := b^{\frac{1}{p-1}} > 0$$

Dann gilt:

$$p \cdot a \cdot c^{p-1} \leq a^p + (p-1) \cdot c^p \qquad (3)$$

aus (3) $\Rightarrow$ (2)

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a \cdot c^{p-1} \leq \frac{1}{p} \cdot (a^p + (p-1) \cdot c^p) = \frac{1}{p}a^p + \frac{p-1}{p} \cdot c^p \\ &= \frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} \cdot b^q \qquad (c = b^{\frac{1}{p-1}}) \end{aligned}$$

Beweis von (3):

1. Fall: $a = c$✓

2. Fall: $a < c$

$$a\left(a^{p-2} + a^{p-3}c + \dots + ac^{p-3} + c^{p-2}\right) = a \cdot \sum_{i=0}^{p-2} a^i \cdot c^{p-2-i} < \underbrace{(p-1)}_{Anzahl Summanden} \cdot c^{p-1}$$

$$\sum_{i=0}^{p-2} a^i \cdot c^{p-2-i} = \frac{c^{p-1} - a^{p-1}}{c - a}$$

$$\Rightarrow a\frac{c^{p-1} - a^{p-1}}{c - a} < (p-1)c^{p-1}$$

$$\Rightarrow a(c^{p-1} - a^{p-1}) < (p-1)c^{p-1}(c - a)$$

$$\Rightarrow ac^{p-1} - a^p < (p-1)(c^p - ac^{p-1})$$

$$\Rightarrow pac^{p-1} < a^p + (p-1)c^p \qquad \square$$

3. Fall: $a > c$

$$
\begin{aligned}
& a \cdot \sum_{i=0}^{p-2} a^i c^{p-2-i} > (p-1)c^{p-1} \\
& \Rightarrow a \frac{a^{p-1} - c^{p-1}}{a-c} > (p-1)c^{p-1} \\
& \Rightarrow a \cdot (a^{p-1} - c^{p-1}) > (p-1)c^{p-1}(a-c) \\
& \Rightarrow a^p - ac^{p-1} > (p-1)c^{p-1} - c(p-1)c^p \\
& \Rightarrow a^p + (p-1)c^p > pac^{p-1} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Beweis Satz 3: Induktion: $n = 1$. Verankerung ist trivial. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, die Formel gilt für alle $x_1, \ldots, x_n > 0$. Wir müssen zeigen, dass es auch für $n+1$ gilt.

$$
\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{\frac{1}{n+1}} &= \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot x_{n+1}^{1/n+1} \\
&= \left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot x_{n+1}^{1/n+1} \leq \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot x_{n+1}^{1/n+1}
\end{aligned}
$$

Sei $a := x_{n+1}^{1/n+1}$ $\quad b := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{n/n+1}$, $p := n+1$, $q := \frac{n+1}{n}$.

$$
a^p = x_{n+1} \quad b^q = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{\frac{1}{n+1}} &\leq ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q = \frac{1}{n+1} x_{n+1} + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} x_i
\end{aligned}
$$

9. Die Betragsfunktion

Definition: Sei $x \in \mathbb{R}$, dann heisst die Zahl

$$
|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x > 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}
$$

der Betrag von x

Lemma 3:
(i) $|x| \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$
(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ *Dreiecksungleichung*
(iv) $|x \cdot y| = |x|\,|y|$

Beweis:
(i) trivial
(ii) trivial
(iii)

$$
\begin{aligned}
|x+y|^2 &= (x+y)^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2\,|x|\,|y| + y^2 \\
&= |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \\
&\Rightarrow (x+y)^2 \leq (|x| + |y|)^2 \\
&\Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y| \qquad \square
\end{aligned}
$$

(iv)

$$\begin{array}{lllllll} x \geq 0, & y \geq 0 & \Rightarrow & x \cdot y \geq 0 & |x \cdot y| & = & x \cdot y & = |x|\,|y| \\ x \geq 0, & y < 0 & \Rightarrow & x \cdot y \leq 0 & |x \cdot y| & = & x \cdot -y & = |x|\,|y| \\ x < 0, & y \geq 0 & \Rightarrow & x \cdot y \leq 0 & |x \cdot y| & = & -x \cdot y & = |x|\,|y| \\ x < 0, & y < 0 & \Rightarrow & x \cdot y \geq 0 & |x \cdot y| & = & -x \cdot -y & = |x|\,|y| \end{array} \qquad \square$$

10. Koordinaten der Ebene

Sei $z := (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Definition: Der Betrag von z (oder die Länge) ist die Zahl $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$

Lemma 4: (i) $|z| \geq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^2$
(ii) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = (0, 0) = 0$
(iii) $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$

Beweis: (i) trivial
(ii) trivial
(iii) $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$. Wir definieren $\langle z_1, z_2 \rangle := x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ heisst das skalar, oder das innere Produkt.

Skalar: $\langle z_1, z_2 \rangle := x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ (4)

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $\langle z_1, z_2 \rangle \leq |z_1| \cdot |z_2| \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ (5)

Beweis Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{array}{rcl} \langle z_1, z_2 \rangle^2 & = & (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2)^2 \\ & = & x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + 2(x_1 y_2)(y_1 x_2) \\ & \overset{L4}{\leq} & x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 \\ & = & (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \\ & \Rightarrow & \text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung} \end{array}$$

Beweis von (iii):

$$\begin{array}{rcl} |z_1 + z_2|^2 & = & (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \\ & = & x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \\ & = & |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\langle z_1, z_2 \rangle \\ & \overset{CSU}{\leq} & |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{array} \qquad \square$$

11. Abbildungen

[V4-081101] Seien X, Y Mengen. Eine Funktion (oder Abbildung) von X nach Y ist eine Funktion-Zuordnung $f : X \to Y$, welche jedem Element X genau ein Element von Y zuordnet.

$$X \to \boxed{\text{f}} \to Y$$

Beispiel 1.9: $X = Y = \{1, 2, 3\}$

(a) $f(1) = 2$
$f(2) = 3$
$f(3) = 1$

(b) $f(1) = f(2) = 1$
$f(3) = 3$

Beispiel 1.10: $X = Y = \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$

Beispiel 1.11: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$
$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x, y) = x + y$

Beispiel 1.12: $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$
$f(t) = (\cos t, \sin t)$

Beispiel 1.13: $X = Y$
$f(x) = \mathrm{id}_X$ *Identität*

Beispiel 1.14: $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^3$
$f(t) = (a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, a_3 + tv_3) \qquad v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \qquad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Wir nennen X den *Definitionsbereich* von f, und Y den *Bildbereich* von f. Die Menge $f(x) := \{f(x)|x \in X\}$ heisst *Bild von f*

$$\begin{aligned} \textit{Definitionsbereich:} \quad & X && (6)\\ \textit{Bildbereich:} \quad & Y && (7)\\ \textit{Bild von } f\textit{:} \quad & f(x) := \{f(x)|x \in X\} && (8) \end{aligned}$$

Definition: Eine Funktion $f : X \to Y$ heisst *injektiv* wenn gilt: $\forall\, x_1, x_2 \in X\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, *surjektiv* wenn gilt: $\forall\, y \in Y \quad \exists\, x \in X$ so dass $f(x) = y$, d.h. $f(x) = Y$, *bijektiv* wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv.

$$\begin{aligned} \textit{injektiv:} \quad & \forall\, x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 && (9)\\ \textit{surjektiv:} \quad & \forall\, y \in Y \quad \exists\, x \in X \text{ so dass } f(x) = y && (10)\\ \textit{bijektiv:} \quad & f \text{ injektiv und surjektiv} && (11) \end{aligned}$$

Umkehrfunktion: Wenn f bijektiv ist, so gibt es eine *Umkehrfunktion* $f' : Y \to X$, die einem Element $y \in Y$ genau das Element $x = f^{-1}(y)$ zuordnet, für das gilt $f(x) = y$.

Beispiel 1.15: Im Beispiel 11.1 a)
$f'(1) = 3$
$f'(2) = 1$
$f'(3) = 2$

Komposition: Wenn $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$, so ist die *Komposition* $g \circ f : X \to Z$ definiert als die Funktion, die einem Element $x \in X$ das Element $g\,(f(x)) \in Z$ zuordnet

Beispiel 1.16: Sei $f : X \to Y$ bijektiv und $f^{-1} : Y \to X$ die Umkehrabbildung, dann gilt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ *Identität x*

12. Folge

Definition: Eine Folge von X ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to X$. Standartbezeichnung: $x_n = f(n) \in X$; $x_1, x_2, x_3, \ldots$

$$\textit{Folge: } x_n = f(n) \in X \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots \qquad (12)$$

Beispiel 1.17: $X = \mathbb{R}$. Wir bilden eine Folge $x_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ durch folgende Rekursionsformel:

$$x_1 \quad := 3 \quad ; \quad x_{n+1} \quad := \quad \tfrac{1}{2}\left(x_n + \tfrac{7}{x_n}\right)$$

Wie verhält sich diese Folge x_n im *Limes* $n \to \infty$?

BEHAUPTUNG: $\sqrt{7} < x_n < \sqrt{7} + \frac{1}{2^n}$ (Hieraus folgt, das x_n gegen $\sqrt{7}$ konvergiert).

Beweis: $n = 1 \qquad \sqrt{7} < 3 < \sqrt{7} + \frac{1}{2} \quad \checkmark$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{7} &= \tfrac{1}{2}(x_n + \tfrac{7}{x_n} - 2\sqrt{7}) \\ &= \tfrac{1}{2x_n}(x_n^2 + 7 - 2x_n\sqrt{7}) \\ &= \tfrac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{7})^2 \geq 0 \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{x_n - \sqrt{7}}{x_n}}_{<1} \cdot (x_n - \sqrt{7}) < \tfrac{1}{2}(x_n - \sqrt{7}) \end{aligned}$$

Durch Induktion folgt: $\left|x_n - \sqrt{7}\right| < \frac{1}{2}$

13. Zusammenfassung

1 Eine Aussage ist eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist

2 Eine Aussageform ist ein Test $A(x)$ mit einer oder mehreren freien Variablen x, der für jeden Wert von x in eine wahre oder falsche Aussage übergeht.

3 Die Menge der reellen Zahlen hat folgende Eigenschaften
- (i) Es gelten die Körperaxiome, das heisst die Additions- und Multiplikationsgesetze sowie das Distributivgesetz.
- (ii) Es gilt das Ordnungsaxiom, das heisst, wenn $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x < y$, $x = y$ oder $x > y$
- (iii) Es gilt das Vollständigkeitsaxiom

4 Wenn $x_k = a^n$, $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a^k := \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

5 Für die Fakultät gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

6 $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k y^{n-k}$$

7 $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

8 Es existieren verschiedene Beweisarten, wir unterscheiden

Vollständige Induktion: Wir verankern die Aussage $A(n)$ für $n = 1$ und zeigen dann, dass wenn $A(n)$ gilt, auch $A(n+1)$ gilt.

Indirekter Beweis: Wollen wir zeigen, dass $A \Rightarrow B$, können wir auch $\not B \Rightarrow \not A$ nachweisen.

Wahrheitstafeln: Mit Wahrheitstafeln lässt sich beweisen, dass zwei logische Ausdrücke äquivalent sind.

Fallunterscheidung: Bei einfachen Aussagen genügt es oft, alle Fälle einzeln nachzuweisen.

9 Wir definieren das arithmetische Mittel durch

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

und das geometrische Mittel durch

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n}$$

10 $\forall\, x_1, \ldots, x_n > 0$ gilt

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

11 Sei $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Sei $q = \frac{p}{p-1}$. Dann gilt für alle $a, b > 0$

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \qquad (2)$$

12 Sei $x \in \mathbb{R}$, dann heisst die Zahl

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x > 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

der Betrag von x

13 Die Dreiecksungleichung lautet: $|x + y| \leq |x| + |y|$

14 Sei $z := (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Der Betrag von z (oder die Länge) ist die Zahl $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$. Auch hier gilt die Dreiecksungleichung.

15 Das innere Produkt ist definiert durch

$$\langle z_1, z_2 \rangle := x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

16 Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung lautet $\langle z_1, z_2 \rangle \leq |z_1| \cdot |z_2|$, $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$.

17 Seien X, Y Mengen. Eine Funktion (oder Abbildung) von X nach Y ist eine Funktion-Zuordnung $f : X \to Y$, welche jedem Element X genau ein Element von Y zuordnet.

18 Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Wir nennen X den Definitionsbereich von f, und Y den Bildbereich von f. Die Menge $f(x) := \{f(x) | x \in X\}$ heisst Bild von f.

19 Eine Funktion $f : X \to Y$ heisst injektiv wenn gilt: $\forall\, x_1, x_2 \in X\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, surjektiv wenn gilt: $\forall\, y \in Y \quad \exists\, x \in X$ so dass $f(x) = y$, d.h. $f(x) = Y$, bijektiv, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv.

20 Wenn f bijektiv ist, so gibt es eine Umkehrfunktion $f' : Y \to X$, die einem Element $y \in Y$ genau das Element $x = f^{-1}(y)$ zuordnet, für das gilt $f(x) = y$.

21 Wenn $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$, so ist die Komposition $g \circ f : X \to Z$ definiert als die Funktion, die einem Element $x \in X$ das Element $g\,(f(x)) \in Z$ zuordnet

22 Eine Folge von X ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to X$. Standartbezeichnung: $x_n = f(n) \in X$; $x_1, x_2, x_3, \ldots$

KAPITEL 2

Vektoralgebra & die komplexen Zahlen

Beispiel 2.1: Der 3−dimensionale euklidische Raum $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ein Element $x \in \mathbb{R}^3$ schreiben wir in der Form: $x = (x_1, x_2, x_3)$ oder $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Operationen: Zwei Grundoperationen:

Addition: $x = (x_1, x_2, x_3) \quad y = (y_1, y_2, y_3)$
$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
skalare Multiplikation: $\lambda \in \mathbb{R} x = (x_1, x_2, x_3)$
$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

Die üblichen Rechenregeln gelten.

Definition: Ein Vektorraum (über $\mathbb{R}$) ist eine Menge $\mathbb{V}$ zusammen mit zwei Operationen:

Addtion: $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V} : (v, w) \mapsto v + w$
skalare Multiplikation: $\mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V} : (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$

so dass folgende Axiome gelten:

(1) **Addition**
  (a) *Kommutativgesetz:* $v + w = w + v \quad \forall\, v, w \in \mathbb{V}$
  (b) *Assoziativgesetz:* $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall\, u, w, v \in \mathbb{V}$
  (c) *Nullvektor:* Es existiert ein Vektor $0 \in \mathbb{V}$, so dass $v + 0 = v \qquad \forall\, v \in \mathbb{V}$
  (d) *inverses Element:* Für jeden Vektor $v \in \mathbb{V}$ git es einen Vektor $-v \in \mathbb{V}$ so dass $v + (-v) = 0$
(2) **skalare Multiplikation**
  (a) *Assoziativgesetz:* $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
  (b) *neutrales Element:* $1 \cdot v = v \quad \forall\, v \in \mathbb{V}$
(3) **Distributivaxiome**
  (a) *erstes Distributivgesetz:* $\lambda \cdot (v + w) = \lambda v + \lambda w \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall\, v, w \in \mathbb{V}$
  (b) *zweites Distributivgesetz:* $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall\, v \in \mathbb{V}$

Bemerkung: Sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $\underbrace{0}_{\in \mathbb{R}} \cdot v = \underbrace{0}_{\in \mathbb{V}} \qquad \forall\, v \in \mathbb{V}$
(ii) $\lambda \cdot \underbrace{0}_{\in \mathbb{V}} = \underbrace{0}_{\in V} \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$
(iii) $-1 \cdot v = -v \qquad \forall\, v \in \mathbb{V}$

Beweis (iii):

$$\begin{aligned} v + (-1) \cdot v &= 0 &&= 1 \cdot v + (-1) \cdot v \\ &= (1 + (-1)) \cdot v &&= 0 \cdot v \overset{(i)}{=} 0 \end{aligned}$$

1. Basis von $\mathbb{V}$

[V5-121101] $\mathcal{L} :=$ Raum der Lösungen der Differentialgleichung

$$y'''' = 0 = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \text{Die vierte Ableitung von } y \text{ ist Null}\}$$

Jede solche Funktion hat die Form $y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$. $L :=$ Raum der Lösungen, ist 4−dimensional.
Die Vektoren $e_0, e_1, e_2, e_3 \in L$, die durch $e_0(t) = 1$, $e_1(t) = t$, $e_2(t) = t^2$, $e_3(t) = t^3$ definiert sind, bilden eine *Basis* von L
Jedes Element von $y \in L$ kann in der Form

$$y = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \cdot e_i$$

geschrieben werden, für gewisse $\alpha_i \in \mathbb{R}$

Definition: Sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Sei $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset \mathbb{V}$. Die Vektoren $e_1, \dots, e_n$ heissen *linear unabhängig*, falls für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Die Vektoren $e_1, \dots, e_n$ heissen *vollständig*, wenn $\forall\, v \in \mathbb{V} \quad \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$$

Die Menge $\{e_1, \dots, e_n\}$ heisst eine *Basis* von $\mathbb{V}$, wenn sie sowohl unabhängig, als auch vollständig ist. Wir sagen, dass $\mathbb{V}$ die *Dimension* n hat, falls es eine Basis gibt, die genau $n-$Elemente hat.

Beispiel 2.2:
- $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $e_1 \in \mathbb{R}^3$. e_1 ist linear unabhängig $\Leftrightarrow e_1 \neq 0$
- $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$. $\{e_1, e_2\}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$ und ausserdem e_1 und e_2 nicht parallel, d.h. $e_1 \neq \alpha \cdot e_2$
- $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diese Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

$$0 = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Beispiel 2.3: $v, w \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben und linar unabhängig. Die durch v und w aufgespannte Ebene ist die Menge $E := \{s \cdot v + t \cdot w | s, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Diese Menge E ist ein Vektorraum; $\dim E = 2$

Beispiel 2.4: Sei $v \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, dann ist $L := \{t \cdot v | t \in \mathbb{R}\}$ ein 1−dimensionaler Vektorraum

Beispiel 2.5: Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, so dass mindestens ein $a_i \neq 0$. Dann ist $E := \{x \in \mathbb{R}^3 | a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = 0\}$ ein 2−dimensionaler Vektorraum. Zum Beispiel $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

$$\begin{aligned} E &:= \{x \in \mathbb{R}^3 | \textstyle\sum_{i=1}^3 x_i = 0\} \\ &= \{s \cdot v + t \cdot w | s, t \in \mathbb{R}\} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \{s + t, -s, -t | s, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Beispiel 2.6: Seien $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$. $\exists\, i$ so dass $a_i \neq b$. $E := \{x \in \mathbb{R}^3 | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b\}$ ist *kein* Vektorraum, die Menge ist nicht invariant oder abgeschlossen gemäss der Addition oder Multiplikation

Definition: Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ein *inneres/skalar Produkt* ist eine Abbildung von $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) *symmetrisch:* $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \quad \forall\, v, w \in \mathbb{V}$
(ii) *bilinear:* $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle \quad \forall\, v_1, v_2, w \in \mathbb{V}$
$\langle \lambda v_1, w\rangle = \lambda \cdot \langle v_1, w\rangle \quad \forall\, v, w \in \mathbb{V}$
(iii) *positiv definiert:* $\langle v, v\rangle > 0 \quad \forall\, v \in \mathbb{V}\backslash\{0\}$

Sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann heisst die reelle Zahl $|v| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die *Norm* von v

Norm von v: $|v| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ (13)

Beispiel 2.7: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$. Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$, dass heisst $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$
$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3}$ *Euklidische Norm*

Euklidische Norm: $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3}$ (14)

Bemerkung: In der Literatur wir das innere Produkt auch mit $v \cdot w$ bezeichnet.

Lemma 5: Sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann gilt:

(i) $\langle v, w\rangle \le |v| \cdot |w| \qquad \forall\, v, w \in \mathbb{V}$ *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*
(ii) $|v| + |w| \ge |v + w| \qquad \forall\, v, w \in \mathbb{V}$
(iii) $|\lambda \cdot v| = |\lambda| \cdot |v| \qquad \forall\, v, w \in \mathbb{V}$

Beweis: (i) $w = 0$**:** so gilt $\langle v, 0\rangle = 0 = |v| \cdot 0$
$w \neq 0$**:** dann

$$
\begin{aligned}
0 &\le \left| v - \frac{\langle v, w\rangle}{|w|^2} \cdot w \right|^2 = \left\langle v - \frac{\langle v, w\rangle}{|w|^2} \cdot w, v - \frac{\langle v, w\rangle}{|w|^2} \cdot w \right\rangle \\
&= \left\langle v, v - \frac{\langle v, w\rangle}{|w|^2} \cdot w \right\rangle - \left\langle \frac{\langle v, w\rangle}{|w|^2} \cdot w, v - \frac{\langle v, w\rangle}{|w|^2} \cdot w \right\rangle \\
&= \left\langle v, v - \frac{\langle v, w\rangle}{|w|^2} \cdot w \right\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{|w|^2} \cdot \left\langle w, v - \frac{\langle v, w\rangle}{|w|^2} \cdot w \right\rangle \\
&= \langle v, v\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{|w|^2} \cdot \langle v, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{|w|^2} \cdot \underbrace{\left(\langle w, v\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{|w|^2} \cdot \langle w, w\rangle \right)}_{0} \\
&= |v|^2 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{|w|^2} \Rightarrow \frac{\langle v, w\rangle^2}{|w|^2} \le |v|^2 \\
&\Rightarrow \langle v, w\rangle = |v| \cdot |w| \qquad \square
\end{aligned}
$$

(ii) $|v + w| \le |v| + |w|$

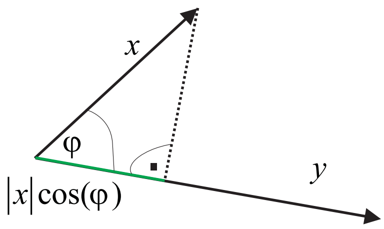
$$
\begin{aligned}
|v + w|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + \langle w, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \\
&= |v|^2 + 2 \cdot \langle v, w\rangle + |w|^2 \\
&\overset{(i)}{\le} |v|^2 + 2 \cdot |v| \cdot |w| + |w|^2 \\
&= (|v| + |w|)^2 \qquad \square
\end{aligned}
$$

(iii) $|\lambda \cdot v| = |\lambda| \cdot |v|$

$$\begin{aligned} |\lambda \cdot v|^2 &= \langle \lambda v, \lambda v \rangle \\ &= \lambda^2 \cdot \langle v, v \rangle \\ &= (|\lambda| \cdot |v|)^2 \qquad \square \end{aligned}$$

[V6-151101]

Beispiel 2.8: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ Standart inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$



$$|\vec{x}| \cdot \cos \phi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{y}|}$$

Der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ ist durch die Formel

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|}$$

gegeben.

$$\begin{aligned} \textit{spitzer Winkel} &\Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle > 0 \\ \textit{rechter Winkel} &\Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \\ \textit{stumpfer Winkel} &\Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle < 0 \end{aligned}$$

$e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$. $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle$ *Orthonormale Basis*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Satz 4: $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ und $y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Sei $\varphi = [0, \pi]$ der eingeschlossene Winkel, dann gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle x, y \rangle}{|x|\,|y|}$$

Beweis: Wir benützen folgendende Fakten: x und y stehen senkrecht aufeinander $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$ & In einem rechtwinkligen Dreieck gilt: $\cos \varphi = \frac{a}{c}$

Fall 1: $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

Fall 2: in einem rechtwinkligen Dreieck. $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Sei x_0 ein Vektor $\in \mathbb{R}y$, so gewählt, dass $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp \vec{y}$. $x_0 = t \cdot y$

$$\begin{aligned}
0 &= \langle x - ty, y \rangle \\
&= \langle x, y \rangle - t \langle y, y \rangle \\
t &= \frac{\langle x, y \rangle}{|y|^2} \\
\Rightarrow x_0 &= \frac{\langle x, y \rangle}{|y|^2} y \\
|x_0| &= \frac{|\langle x, y \rangle|}{|y|^2} \cdot |y| = \frac{|\langle x, y \rangle|}{|y|} = \frac{\langle x, y \rangle}{|y|} \\
\cos\varphi &= \frac{|x_0|}{|x|} \\
&= \frac{\langle x, y \rangle}{|y|\,|x|}
\end{aligned}$$

Fall 3: $\langle x, y \rangle < 0$

$$x_0 = \frac{\langle x, y \rangle}{|y|^2} \cdot y < 0$$

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi) &= -\cos(\pi - \varphi) \\
&= -\frac{|x_0|}{x} \\
&= -\frac{\frac{|\langle x, y \rangle|}{|y|}}{|x|} \\
&= -\left(\frac{-\langle x, y \rangle}{|x|\,|y|} \right) \\
&= \frac{\langle x, y \rangle}{|y|\,|x|}
\end{aligned}$$

Beispiel 2.9: Gegeben seien 2 Vektoren $\vec{a}$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \neq \vec{x}_0$. Gesucht ist die Ebene $\Xi \perp \vec{a}$ in der $\vec{x}_0$ liegt.
$\vec{x}_0 \in \Xi$, $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp \vec{a}$
$\Xi := \{x \in \mathbb{R}^3 | \langle x - x_0, a \rangle = 0\}$
$a = \{a_1, a_2, a_3\}$, $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, $x_0 = \{x_{01}, x_{02}, x_{03}\}$, $\langle x, a \rangle = \langle x_0, a \rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^3 x_i a_i = \sum_{i=1}^3 x_{0i} a_i$.
Sei $b = \langle x_0, a \rangle \rightarrow \Xi = \{x = \mathbb{R}^3 | a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b\}$

Beispiel 2.10: Gegeben seien $\vec{x}_0$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. $\vec{x}_0 \neq \vec{a}$. $\Omega \in \mathbb{R}$. $0 < \Omega < \frac{\pi}{2}$. Gesucht ist der Doppelkegel K mit Spitze $\vec{x}_0$, Achsenrichtung $\vec{a}$, Öffnungswinkel Ω.

$$\cos(\Omega) = \frac{\langle x - x_0, a \rangle}{|x - x_0|\,|a|}$$

$\langle x - x_0, a \rangle = \cos(\Omega) \cdot |x - x_0|\,|a|$

$$K \quad := \quad \{x \in \mathbb{R}^3 | \langle x - x_0, a \rangle = \cos(\Omega)\,|x - x_0|\,|a|\}$$

2. Das Vektorprodukt

Definition: Sei $u = \{u_1, u_2, u_3\}, v = \{v_1, v_2, v_3\}$, dann ist das Vektorprodukt $u \times v$ definiert durch

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 1:

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_3 & v_3 \end{pmatrix} e_1 + \det \begin{pmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{pmatrix} e_2 + \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} e_3 \quad \text{oder}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 2:

$$\begin{array}{rcll} e_1 \times e_2 &=& e_3 & e_1 \times e_1 = 0 \\ e_2 \times e_3 &=& e_1 & e_2 \times e_2 = 0 \\ e_3 \times e_1 &=& e_2 & e_3 \times e_3 = 0 \end{array}$$

Lemma 6: Das Vektorprodukt ist schiefsymmetrisch und bilinear

(i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
(ii) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$
(iii) $(\vec{a} + \vec{u}) \times \vec{b} = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{u} \times \vec{b})$

Das Vektorprodukt ist *nicht* assoziativ. $(a \times b) \times c \neq (a \times c) \times b$

$$\begin{array}{rcccl} (e_1 \times e_2) \times e_2 &=& e_3 \times e_2 &=& -e_1 \\ e_1 \times (e_2 \times e_2) &=& e_1 \times 0 &=& 0 \end{array}$$

Lemma 7: Das Vektorprodukt erfüllt die *Jacobi-Identität*

$$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v \quad = \quad 0$$

Beweis: *in den Übungen.* Hinweis: $(u \times v) \times w = \langle u, w\rangle \cdot v - \langle v, w\rangle \cdot u$

Lemma 8: $\langle u \times v, w\rangle = \langle u, v \times w\rangle$ *Spatprodukt*

Beweis (Lemma 8):

$$\begin{aligned} \langle u \times v, w\rangle &= \left\langle \det \begin{pmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \det(u, v, w) \\ &= \det(v, w, u) = \langle u \times w, u\rangle = \langle u, v \times w\rangle \quad \square \end{aligned}$$

Spatprodukt: $\langle u \times v, w\rangle$ (15)

Die Bedeutung des Vektorprodukts: $v \times u \perp u, v$

FOLGERUNG: $u \times v$ ist senkrecht auf u und v

$$\begin{array}{lclclcl} \langle u \times v, u\rangle & = & \langle u, u \times v\rangle & \overset{L8}{=} & \langle u \times u, v\rangle & = & 0 \\ \langle u \times v, v\rangle & \overset{L8}{=} & \langle v \times v, u\rangle & = & \langle 0, u\rangle & = & 0 \end{array}$$

NORM:

$$\begin{array}{rrcll} & |u \times v|^2 & = & (u \times v)(u \times v) & \\ & & = & \langle u \times v, u \times v\rangle & \\ & & \overset{L8}{=} & \langle (u \times v) \times u, v\rangle & \\ & & = & \langle \langle u, u\rangle\, v - \langle v, u\rangle\, v, v\rangle\,^{*} & \\ & & = & \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle - \langle v, u\rangle \langle u, v\rangle\,^{\dagger} & \\ & & = & |u|^2 \cdot |v|^2 - \langle u, v\rangle^2 & \\ \Rightarrow & u \times v & = & \sqrt{|u|^2 \cdot |v|^2 - \langle u, v\rangle^2} & u \neq 0, v \neq 0 \\ & & = & |u|\,|v| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{|u|^2 |v|^2}} & \\ & & = & |u|\,|v| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} \quad 0 < \varphi < \pi & \\ & & = & |u|\,|v| \cdot \sin(\varphi) = \text{ Fläche Parallelogramm} & \end{array}$$

[V7-191101] $u, v \in \mathbb{R}^3$

$$|u \times v| \quad = \sqrt{|v|^2 + |u|^2 - \langle u, v\rangle^2} = \mathit{Fläche}$$

FOLGERUNG: u & v sind linear unabhängig $\Leftrightarrow u \times v = 0$

Beweis: u,v sind linear abhängig $\Leftrightarrow u = 0$,$v = 0$ oder der Winkel $\varphi = 0$ oder $\pi \Leftrightarrow u = 0$, oder $v = 0$ oder $\cos^2 \varphi = 1$

$$\cos\varphi = \frac{\langle u, v\rangle}{|u|\,|v|} \Leftrightarrow u = 0 \text{ oder } v = 0 \text{ oder } \frac{\langle u, v\rangle^2}{|u|^2\,|v|^2} = 1$$
$$\Leftrightarrow |u|^2\,|v|^2 = \langle u, v\rangle^2 \Leftrightarrow |u|^2\,|v|^2 - \langle u, v\rangle^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow |u \times v|^2 = 0 \Rightarrow |u \times v| = 0$$
$$\Leftrightarrow u \times v = 0 \quad \square$$

Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ zwei linear unabhängige Vektoren. Die von u & v aufgespannte Ebene ist definiert durch

$$E \quad = \quad \{su + tv | s, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

FOLGERUNG: $\forall\, w \in \mathbb{R}^3$ gilt: $w \in E \Leftrightarrow \langle w, u \times v\rangle = 0$

Beweis: Sei $w \in E$. Dann $\exists\, s, t \in \mathbb{R}$, so dass $w = su + tv$

$$\begin{array}{lcl} \langle w, u \times v\rangle & = & \langle su + tv, u \times v\rangle \\ & = & s \langle u, u \times v\rangle + t \langle v, u \times v\rangle \\ & = & s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0 \qquad \square \end{array}$$

* $(u \times v) \times w = \langle u, w\rangle \cdot v - \langle v, w\rangle \cdot u$

† $\langle \langle t, u\rangle \cdot v, w\rangle = \langle t, u\rangle \langle v, w\rangle$

Sei $w \in \mathbb{R}^3$ orthogonal zu $u \times v$. Die Vektoren $u, v, u \times v$ sind linear unabhängig $\Rightarrow$ die Vektoren bilden eine Basis $\Rightarrow \exists\, s, t, \lambda \in \mathbb{R}$ so dass $w = s \cdot u + t \cdot v + \lambda \cdot (u \times v)$. $w \perp u \times v$

$$\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & \langle w, u \times v\rangle & = & 0 \\
\Rightarrow & \langle su + tu + \lambda(u \times v), u \times v\rangle & = & 0 \\
\Rightarrow & \underbrace{s\,\langle u, u \times v\rangle}_{0} + \underbrace{t\,\langle v, u \times v\rangle}_{0} + \underbrace{\lambda\,\langle u \times v, u \times v\rangle}_{\lambda|u \times v|^2} & = & 0 \\
\Rightarrow & \multicolumn{3}{l}{\lambda = 0 \text{ da } u \times v \text{ linear unabhängig}} \\
\Rightarrow & \multicolumn{3}{l}{w = su + tv \Rightarrow w \in E \quad \square}
\end{array}$$

3. Determinante

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Die *Determinante* von v, w, u ist definiert durch:

$$\begin{aligned}
\det(u, v, w) := & \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\
& = u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - u_1 w_2 v_3 - v_1 u_2 w_3 - w_1 v_2 u_3
\end{aligned}$$

Eigenschaften:

Anti-Symmetrie:

$$\begin{array}{rclcl}
\det(u, v, w) & = & \det(v, w, u) & = & \det(w, u, v) = \\
-\det(u, w, v) & = & -\det(v, u, w) & = & -\det(w, v, u) \qquad \forall\, u, v, w \in \mathbb{R}^3
\end{array}$$

Multilinearität:

$$\begin{array}{rcl}
\det(u + u', v, w) & = & \det(u, v, w) + \det(u', v, w) \\
\det(\lambda u, v, w) & = & \lambda \det(u, v, w) \qquad \forall\, u, u', v, w \in \mathbb{R}^3, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}
\end{array}$$

Normalisierung:

$$\det e_1, e_2, e_3 \;=\; 1 \qquad e_1, e_2, e_3 = \text{ Einheitsvektoren}$$

Bemerkung: Diese Eigenschaften bestimmen die Determinante eindeutig

Lemma 9: $F := |u \times v|$. Seien u,v, $w \in \mathbb{R}^3$. $\det(u, v, w) =$ Volumen des von u,v, w aufgespannten Parallelpipeds.

Beweis: $F := |u \times v|$ Flächeninhalt des von u,v aufgespannten Parallelgramm. $E := \{su + tv | s, t \in \mathbb{R}\}$ $h =$Höhe des Parallelpipeds über E. $\varphi :=$ Winkel zwischen w & $u \times v$.

$$\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & h & = & |w|\,|\cos\varphi| \\
\Rightarrow & \text{Volumen} & = & F \cdot h = |u \times v|\,|w|\,|\cos\varphi| \\
 & \langle u \times v, w\rangle & = & |u \times v|\,|w| \cos\varphi = \text{nach Lemma} \\
 & & = & F \cdot h = \text{Volumen}
\end{array}$$

Lemma 10: Seien u,v,$w \in \mathbb{R}^3$. u,v,w sind linear abhängig $\Leftrightarrow \det(u, v, w) = 0$.

Beweis: $\Rightarrow$**:** u,v,w sind linear abhängig, das heisst $\exists\ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, so dass mindestens eine dieser Zahlen $\neq 0$ und $\lambda u + \mu v + \nu w = 0$. Sei $\nu \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\nu = -1$ $\Rightarrow w = \lambda u + \mu v \Rightarrow \det(u, v, w) \overset{Def}{=} \langle u \times v, w\rangle = 0$. $\square$
$\Leftarrow$**:** Sei $\det(u, v, w) = 0$

Fall 1: u,v linear abhängig. Dann sind auch u,v,w linear abhängig.
Fall 2: u,v linear unabhängig. Wir wissen $\langle u \times v, w\rangle = \det(u, v, w) = 0$, das heisst $w \perp u \times v$ $\Rightarrow \exists\ s, t \in \mathbb{R}$ so dass $w = su + tv \Rightarrow u, v, w$ sind linear abhängig $\square$

Definition: Basis u,v,w von $\mathbb{R}^3$ heisst *positiv* falls $\det(u, v, w) > 0$ und *negativ*, falls $\det(u, v, w) < 0$

Bemerkung:

(i) u,v,w positive Basis

$$\begin{array}{rrrrl} \Rightarrow & u, & w, & v & \text{negative Basis} \\ & u, & -v, & w & \text{negative Basis} \\ & v, & w, & u & \text{positive Basis} \end{array}$$

(ii) Die Standartbasis e_1,e_2,e_3 ist positiv.
(iii) Falls u,$v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, so bilden die Vektoren u,v,$u \times v$ eine positive Basis des $\mathbb{R}^3$, denn $\det(u, v, u \times v) = \langle u \times v, u \times v\rangle = |u \times v|^2 > 0$

Zusammenfassend: $u,\ v \in \mathbb{R}^3$
(i) u,v linear unabhängig $\Leftrightarrow u \times v = 0$
(ii) u,v linear unabhängig $\Leftrightarrow$
  (a) $u \times v \perp u, v$
  (b) $|u \times v| = F_{Parallelogramm}$
  (c) u,v,$u \times v$ positive Basis

Beispiel 2.11: Gegeben seien zwei Geraden in $\mathbb{R}^3$, nicht parallel. $x(t) = a + t \cdot p$, $y(t) = b + t \cdot q$. a,b,p,$q \in \mathbb{R}^3$. Was ist der Abstand dieser Geraden?

$$\begin{array}{rcl} \Xi & := & \{a + sp + tq | s, t \in \mathbb{R}\} \text{ (Ebene, die } a \text{ enthält und zu } x(t),\ y(t) \text{ parallel ist)} \\ E & := & \{sp + tq | s, t \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

$$n = \frac{p \times q}{|p \times q|} \quad E = \perp n = \{w|\ \langle n, w\rangle = 0\}$$

$$\begin{aligned} \text{Abstand der Geraden} &= \text{Abstand } b - a \text{ zu } E \\ &= \text{Länge der orthogonalen Projektion von } b - a \text{ auf } E^{\perp} \\ &= \mathbb{R} \cdot n = |\langle b - a, n\rangle\, n| = |\langle b - a, n\rangle| \\ &= \left|\left\langle b - a, \frac{p \times q}{|p \times q|}\right\rangle\right| = \frac{|\langle b - a, p \times q\rangle|}{|p \times q|} \\ &= \frac{|\det(b - a, p, q)|}{|p \times q|} \end{aligned}$$

4. Die komplexen Zahlen

[V8-221101]

Definition: $\forall\ x \in \mathbb{R}\ x^2 > 0$. Wir bezeichnen mit i eine Zahl, deren Quadrat $= -1$ ist.

i: $i^2 = -1$ (16)

Die Menge der *komplexen Zahlen* bezeichnen wir mit $\mathbb{C} = \{z = x + i \cdot y | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

RECHENREGELN: $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z + z' &= x + x' + yi + y'i = (x + x') + (y + y')i \\ z \cdot z' &= (x + yi)(x' + iy') = xx' + ixy' + ix'y - yy' \end{aligned}$$

Satz 5: Die komplexen Zahlen, mit Addition und Multiplikation, bilden einen Körper. Multiplikation und Addition sind kommutativ und assoziativ,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 \cdot z_2 &= z_2 \cdot z_1 \\ (z_1 + z_2) \cdot z_3 &= z_1 \cdot (z_2 + z_3) \\ 0_{\mathbb{C}} &= 0_{\mathbb{R}} + i0_{\mathbb{R}} \\ z + 0 &= z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \\ \forall\, z \in \mathbb{C} z + (-z) &= 0 \\ 1_{\mathbb{C}} &= 1_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}} i \\ z \cdot 1 &= z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \\ \forall\, z \in \mathbb{C} \quad \exists\, z^{-1} &= \tfrac{1}{z} \in \mathbb{C} \text{ so dass } \tfrac{1}{z} \cdot z = 0 \end{aligned}$$

Sei $z = x + iy$ und $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$.
Ebenso distributiv

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \qquad \forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

BEZEICHNUNGEN: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ x,$y \in \mathbb{R}$. Wir nennen ...

x	$=:$	$\Re z$	... den Realteil von z
y	$=:$	$\Im z$	... den Imaginärteil von z
$\overline{z}$	$:=$	$x - iy$	konjugiert komplexe Zahl von z

Realteil von z $x =: \Re z$ (17)

Imaginärteil von z $y =: \Im z$ (18)

Konjugiert komplexe Zahl von z $\overline{z} := x - iy$ (19)

Lemma 11: (i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
(ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
(iii) $\overline{-z} = -\overline{z}$, $\qquad \overline{z^{-1}} = z^{-1}$
(iv) $\overline{\overline{z}} = z$
(v) $\Re z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\qquad \Im z = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$
(vi) $z = \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

Beweis: Alle trivial bis auf (*ii*).

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= \overline{z_1 \cdot z_2} \qquad \square \end{aligned}$$

Definition: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Die reelle Zahl $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ heisst *Absolutbetrag* von z

Absolutbetrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (20)

Lemma 12: $\forall\, z, z' \in \mathbb{C}$ gilt:

(i) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
(ii) $|z \cdot z'| = |z|\,|z'|$
(iii) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
(iv) $|\Re z| \leq |z|$, $\quad |\Im z| \leq |z|$
(v) $z \in \mathbb{R} \Rightarrow |z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$

Beweis: (i) ✓

(ii) $|z \cdot z'|^2 = z \cdot z' \cdot \overline{z \cdot z'} = z \cdot z' \cdot \overline{z} \cdot \overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2 \cdot |z'|^2$

(iii) bereits bewiesen $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(iv) trivial

(v) $y = 0 \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2} \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

5. Polarkoordinaten

$x = R \cdot \cos(\varphi)$, $y = R \cdot \sin(\varphi)$, $x^2 + y^2 = R^2$
$z = R \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $R \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}\backslash(2\pi \cdot \mathbb{Z})$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2} = R$. Der Winkel von φ von z ist nur bestimmt bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π

Bezeichnung: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ heisst *Eulersche Formel*

Eulersche Formel: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ (21)

Lemma 13: $\forall\, \varphi, \psi \in \mathbb{R} : e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$

Beweis:

$$\begin{aligned} (\cos\varphi + i \sin\varphi) \cdot (\cos\psi + i \sin\psi) &= \cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi \\ &\quad + i \sin\varphi \cdot \cos\psi + i \cos\varphi \cdot \sin\psi \\ &= \cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi) \qquad \square \end{aligned}$$

Beispiel 2.12: (a) $e^{\frac{\pi}{2}} = i$

(b) $e^{i\pi} = -1$
(c) $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$
(d) $e^{2\pi i k} = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$

Bezeichnung:

$$\begin{aligned} z &= R \cdot e^{i\varphi} \\ R &= |z| \\ \varphi &= \arg(z) \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z} \\ z' &= R' \cdot e^{i\varphi'} \\ z \cdot z' &= R \cdot R' \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi'} = (R \cdot R') \cdot e^{i(\varphi+\varphi')} \\ R \cdot R' &= |z|\,|z'| \\ \varphi + \varphi' &= \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') \end{aligned}$$

Beispiel 2.13: $z = R \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow z^n = R^n \cdot e^{i\varphi \cdot n}$

Beispiel 2.14:

$$z = \frac{(1+i)^6}{(\sqrt{3}-i)^5} = \frac{z_1^6}{z_2^5} \qquad z_1 = 1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow z = \frac{2^{\frac{1}{2}\cdot 6}}{2^5}\cdot e^{6\cdot\frac{\pi}{4}-5\cdot\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4}e^{i\frac{2}{3}\pi} \qquad z_2 = \sqrt{3}-i = 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$$

Beispiel 2.15: Gegeben sei eine komplexe Zahl $c = a + bi \in \mathbb{C}$. Gibt es eine komplexe Zahl $z = x+iy \in \mathbb{C}$, so dass $(x+iy)^n = a+bi$? Sei $c = r\cdot e^{i\varphi}$. Sei $z = r^{1/n}\cdot e^{i\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}}$ $\quad k = 0, 1, \ldots, n-1$

Einheitswurzel: Die Zahlen $z_n = e^{2\pi ik/n}$ $k = 0, 1, \ldots, n-1$ heissen $n-$te Einheitswurzel. Es gilt $z_k^n = 1\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. $z^n + c_{n-1}\cdot z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 = 0 \qquad \sharp$

Einheitswurzel $z_n = e^{i\frac{2\pi}{n}k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad (22)$

Satz 6: *Fundamentalsatz der Algebra.* Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Seien $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$. Dann $\exists\ z \in \mathbb{C}$, so dass $\sharp$ gilt, das heisst jedes Polynom des Grades $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle.

Bemerkung: $z^2 = c = a + bi$, $z = x + iy$, $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy = c \Leftrightarrow x^2 - y^2 = a$, $2xy = b$. Es gilt auch $x^2 + y^2 = |z|^2 = |c| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x^2 &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a) \\ y^2 &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a) \end{aligned}$$

6. Zusammenfassung

1 Ein Vektorraum (über $\mathbb{R}$) ist eine Menge $\mathbb{V}$ zusammen mit zwei Operationen:
Addtion: $\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V} : (v, w) \mapsto v + w$
skalare Multiplikation: $\mathbb{R}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V} : (\lambda, v) \mapsto \lambda\cdot v$

2 Sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Sei $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{V}$. Die Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ heissen linear unabhängig, falls für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\cdot e_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

3 Die Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ heissen vollständig, wenn $\forall\ v \in \mathbb{V}\quad \exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\cdot e_i$$

4 Die Menge $\{e_1, \ldots, e_n\}$ heisst eine Basis von $\mathbb{V}$, wenn sie sowohl unabhängig, als auch vollständig ist. Wir sagen, dass $\mathbb{V}$ die Dimension n hat, falls es eine Basis gibt, die genau $n-$Elemente hat.

5 Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ein inneres/skalar Produkt ist eine Abbildung von $\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{R} : (v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) symmetrisch: $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \quad \forall\ v, w \in \mathbb{V}$
(ii) bilinear: $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle \quad \forall\ v_1, v_2, w \in \mathbb{V}$
$\langle \lambda v_1, w\rangle = \lambda\cdot\langle v_1, w\rangle \quad \forall\ v, w \in \mathbb{V}$
(iii) positiv definiert: $\langle v, v\rangle > 0 \quad \forall\ v \in \mathbb{V}\backslash\{0\}$

6 Sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann heisst die reelle Zahl $|v| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die Norm von v

7 Der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ ist durch die Formel

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|}$$

gegeben. Ist $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle > 0$, dann ist es ein spitzer Winkel, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ein rechter Winkel, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle < 0$ stumpfer Winkel.

8 Bei einer orthonormalen Basis stehen die Basisvektoren senkrecht aufeinander und haben die Länge 1.

9 Sei $u = \{u_1, u_2, u_3\}, v = \{v_1, v_2, v_3\}$, dann ist das Vektorprodukt $u \times v$ definiert durch

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ u_3 v_1 - v_3 u_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix}$$

10 Das Vektorprodukt ist schiefsymmetrisch und bilinear
(i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
(ii) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$
(iii) $(\vec{a} + \vec{u}) \times \vec{b} = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{u} \times \vec{b})$
es ist jedoch nicht assoziativ.

11 Das Vektorprodukt erfüllt die Jacobi-Identität

$$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v \quad = \quad 0$$

12 Für das Spatprodukt gilt $\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle$

13 $u \times v$ ist senkrecht auf u und v

14 $u \times v$ ist gleich dem Parallelogramm, das von u und v aufgespannt wird.

15 Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Die Determinante von v, w, u ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \det(u, v, w) &:= \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ &= u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - u_1 w_2 v_3 - v_1 u_2 w_3 - w_1 v_2 u_3 \end{aligned}$$

16 Die Determinante hat folgende Eigenschaften: Anti-Symmetrie:

$$\begin{aligned} \det(u, v, w) &= \det(v, w, u) &&= \det(w, u, v) = \\ -\det(u, w, v) &= -\det(v, u, w) &&= -\det(w, v, u) \qquad \forall\, u, v, w \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Multilinearität:

$$\begin{aligned} \det(u + u', v, w) &= \det(u, v, w) + \det(u', v, w) \\ \det(\lambda u, v, w) &= \lambda \det(u, v, w) \qquad \forall\, u, u', v, w \in \mathbb{R}^3, \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Normalisierung:

$$\det e_1, e_2, e_3 \quad = \quad 1 \qquad e_1, e_2, e_3 = \text{ Einheitsvektoren}$$

17 Seien u,v, $w \in \mathbb{R}^3$, dann ist $\det(u, v, w) =$ Volumen des von u,v, w aufgespannten Parallelpipeds.

18 Seien u,v,$w \in \mathbb{R}^3$. u,v,w sind linear abhängig $\Leftrightarrow \det(u,v,w) = 0$.

19 Die Basis u,v,w von $\mathbb{R}^3$ heisst positiv, falls $\det(u,v,w) > 0$ und negativ, falls $\det(u,v,w) \ < \ 0$

20 Wir bezeichnen mit i eine Zahl, deren Quadrat $= -1$ ist.

21 Die Menge der komplexen Zahlen bezeichen wir mit $\mathbb{C} = \{z = x + i \cdot y | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

22 Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$, dann gelten folgende Rechenregeln

$$\begin{aligned} z + z' &= x + x' + yi + y'i = (x + x') + (y + y')i \\ z \cdot z' &= (x + yi)(x' + iy') = xx' + ixy' + ix'y - yy' \end{aligned}$$

23 Die komplexen Zahlen, mit Addition und Multiplikation, bilden einen Körper. Multiplikation und Addition sind kommutativ und assoziativ.

24 Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ x,$y \in \mathbb{R}$. Wir nennen $x =: \Re(z)$ den Realteil von z und $y =: \Im(z)$ den Imaginärteil von z.

25 $\overline{z} := x - iy$ nennen wir die konjugiert komplexe Zahl von z.

26 Für die konjugiert komplexe Zahlen gelten die Rechenregeln:
(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
(ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
(iii) $\overline{-z} = -\overline{z}$, $\quad \overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$
(iv) $\overline{\overline{z}} = z$
(v) $\Re z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\quad \Im z = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$
(vi) $z = \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

27 Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Die reelle Zahl $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ heisst Absolutbetrag von z

28 $\forall\, z, z' \in \mathbb{C}$ gilt:
(i) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
(ii) $|z \cdot z'| = |z|\,|z'|$
(iii) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
(iv) $|\Re z| \leq |z|$, $\quad |\Im z| \leq |z|$
(v) $z \in \mathbb{R} \Rightarrow |z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$

29 Für die Polarkoordinaten gilt: $x = R \cdot \cos(\varphi)$, $y = R \cdot \sin(\varphi)$, $x^2 + y^2 = R^2$
$z = R \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $R \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R} \backslash (2\pi \cdot \mathbb{Z})$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2} = R$. Der Winkel von φ von z ist nur bestimmt bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π

30 Es gilt $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$, was wir Eulersche Formel nennen.

31 Die Zahlen $z_n = e^{2\pi i k/n}$ $k = 0, 1, \ldots, n-1$ heissen $n-$te Einheitswurzel. Es gilt $z_k^n = 1 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

32 Der Fundamentalsatz der Algebra lautet: Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Seien $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$. Dann $\exists\, z \in \mathbb{C}$, so dass $z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 = 0$ gilt, das heisst jedes Polynom des Grades $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle.

KAPITEL 3

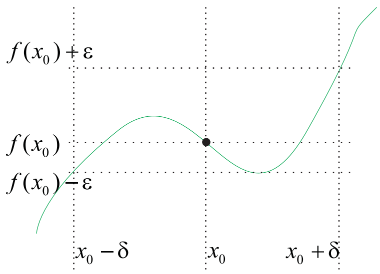
Stetigkeit

[V9-261101]

Wenn sich x nur wenig ändert, soll $g = f(x)$ sich nur wenig ändern. $g = f(x)$ heisst stetig, falls f an jeder Stelle x_0 stetig ist.

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeben, und $x_i \in \mathbb{R}$. f heisst stetig an der Stelle x_0, wenn $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$, so dass $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



Beispiel 3.1: $f(x) = 3$ ist stetig. δ kann beliebig gewählt werden.

Beispiel 3.2: $f(x) = x$. Wir können $\delta = \varepsilon$ wählen.

Beispiel 3.3: Angenommen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ erfüllt die Bedingung $\exists\, C > 0$ so dass

$$|f(x_0) - f(x_1)| \quad \leq \quad C\,|x_0 - x_1| \qquad \natural$$

für alle $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$. (Wenn dies gilt, so heisst f *Lipschitz-stetig*). Wenn $\natural$ erfüllt ist, so ist f stetig an jeder Stelle x_0. $\delta = \varepsilon/C$

Beispiel 3.4: $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ $f(x) = \sqrt{2}$. f ist stetig an der Stelle 0. $|f(x_0) - f(0)| = f(x) \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon$. $0 \leq x < \delta = \varepsilon^2$, aber nicht Lipschitz-stetig, denn

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \not\leq C$$

Beispiel 3.5: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ f ist unstetig an der Stelle $x = 0$. $0 < \varepsilon < 1$

Beispiel 3.6: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin(\frac{1}{x}), & x > 0 \end{cases}$ f ist unstetig an der Stelle $x = 0$

Definition: Ein metrischer Raum ist ein Paar (X, d), wobei X eine Menge ist, und $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ eine Abbildung, die folgende Eigenschaften hat.

- $d(x, y) \geq 0 \quad \forall\ x, y \in X$
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall\ x, y \in X$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Beispiel 3.7: $X = \mathbb{R}^n \qquad x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$\begin{array}{rcll} |x| & = & \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} & \\ |x + y| & \leq & |x| + |y| & \\ d(x, y) & := & |x - y| \qquad x, y \in \mathbb{R}^n & \textit{Euklidische Norm} \end{array}$$

Beispiel 3.8: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist (Ω, d) ein metrischer Raum, wobei $d(x,y) := |x-y| \; \forall \, x,y \in \Omega$

Definition: Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume. Eine Funktion $f : X \mapsto Y$ heisst stetig an der Stelle $x_0 \in X$ wenn gilt: $\forall \, \varepsilon > 0 \quad \exists \, \delta > 0 \quad \forall \, x \in X \; d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Beispiel 3.9: $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f(y)| & = & |x_1 + x_2 - y_1 - y_2| \\ & = & |x_1 - y_1 + x_2 - y_2| \\ & \leq & |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ & \leq & 2 \cdot |x - y| \quad (|x-y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ & \Rightarrow & f \text{ ist Lipstitz stetig} \\ & \Rightarrow & f \text{ ist stetig} \end{array}$$

Beispiel 3.10: $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \qquad f(x) = x_1 \cdot x_2$. Ist f Lipschitz stetig? Das heisst $\exists$? $C > 0$ so dass $\forall \, x, y \in \mathbb{R}^2 \, |f(x) - f(y)| \leq C \, |x-y| \to$ Nein. Sei $R > 0$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass gilt $\forall \, x, y \in \mathbb{R}^2 \quad |x| \leq R$, $|y| \leq R \Rightarrow$

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f(y)| & \leq & C \, |x-y| \\ |f(x) - f(y)| & = & |x_1 x_2 - y_1 y_2| \\ & = & |x_1 x_2 - x_1 y_2 + x_1 y_2 - y_1 y_2| \\ & \leq & |x_1(x_2 - y_2)| + |y_2(x_1 - y_1)| \\ & = & |x_1| \, |x_2 - y_2| + |y_2| \, |x_1 - y_1| \\ & \leq & |x| \, |x-y| + |y| \, |x-y| \\ & \leq & R \cdot |x-y| + R \cdot |x-y| \\ & \leq & 2 \cdot R \cdot |x-y| \end{array}$$

Behauptung gilt für $C = 2R$. f ist *lokal Lipschitz stetig*

BEMERKUNG: $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$. $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad x_1^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \Rightarrow |x_1| \leq |x|$,$|x_2| \leq |x| \Rightarrow |x_1 - y_1| \leq |x| \, |x-y| + |y| \, |x-y|$

Beispiel 3.11: Sei $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \frac{1}{x}$. Behauptung: f ist stetig. Sei $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta > 0$ so dass $\delta < \frac{|x_0|}{2}$. $\delta < \frac{|x_0|^2 \varepsilon}{2}$. Sei $x \in \mathbb{R}$ so dass $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{array}{rrcl} & |x_0 - x| & \geq & |x_0| - |x| \\ \Rightarrow & |x| & \geq & |x_0| - |x - x_0| \\ & & \geq & |x_0| - \delta \\ & & \geq & |x_0| - \frac{|x_0|}{2} = \frac{|x_0|}{2} \\ \Rightarrow & |f(x) - f(x_0)| & = & \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| \\ & \left| \frac{x_0 - x}{x \cdot x_0} \right| & = & \frac{|x_0 - x|}{|x| |x_0|} \\ & \frac{2 \cdot |x - x_0|}{|x_0|^2} & \leq & \frac{2\delta}{|x_0|^2} \leq \varepsilon \end{array}$$

Lemma 14: Seien (X, d_x), (Y, d_y), (Z, d_z) drei metrische Räume und $f : X \mapsto Y \; g : Y \mapsto Z$ stetige Funktionen, dann ist die Funktion $g \circ f : X \mapsto Z$ ebenfalls stetig.

Beweis: Seien $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Die Funktion g ist stetig an der Stelle $y_0 = f(x_0)$, $\exists \, \rho > 0 \quad \forall \, y \in Y \; d_y(y, f(x_0)) < \rho \Rightarrow d_z(g(y), g(f(x_0))) < \varepsilon \quad *$
Da f stetig ist an der Stelle x_0, $\exists \, \delta > 0$ so dass $\forall \, x \in X$, $d_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x_0)) < \rho \quad **$.

Sei $x \in X$ so dass $d_y(f(x), f(x_0)) < \rho \overset{**}{\Rightarrow} d_z(g \circ f(x), g \circ f(x_0)) < \varepsilon$.
Damit haben wir gezeibt, dass $g \circ f$ stetig ist an der Stelle $x_0 \in X$. Dies gilt für jedes $x_0 \in X$, somit ist $g \circ f$ stetig. $\square$

Lemma 15: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f_1, f_2 : X \mapsto \mathbb{R}$ und $f : X \mapsto \mathbb{R}\backslash\{0\}$ seien stetige Funktionen.
$\Rightarrow$ Die Funktionen $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$, $\frac{1}{f} : X \mapsto \mathbb{R}$ sind stetig.

Beweis: $F : X \mapsto \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Sei $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. $\Rightarrow F, g$ sind stetig. $\overset{L14}{\Rightarrow} \underbrace{g \circ F}_{f_1+f_2}$ stetig. ($f_1 \cdot f_2$, $\frac{1}{f}$ sind aus ähnliches Argumenten stetig).

Beispiel 3.12: Jedes Polynom $p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion. $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots \Rightarrow$ Jeder Summand ist stetig nach Lemma 14 und Lemma 15
$\Rightarrow$ Die Summe ist stetig nach Lemma 15

1. metrische Räume

Definition: [V10-291101] Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d), wobei X eine Menge ist und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ so dass:

- $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall\, x, y \in X$
- $d(x, y) \geq 0 \quad \forall\, x, y \in X$
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in X$

Wir nennen $d(x, y)$ den *Abstand* zwischen x und y.

Beispiel 3.13: $p_i : \mathbb{R}^n(x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \to \mathbb{R}$
$p_i(x) := x_i$
$y = 1, \dots, n$

Behauptung: p_i sei stetig

Metriken: $x, y \in \mathbb{R} : d(x, y) = (x - y) \quad x, y \in \mathbb{R}^n \qquad x = \{x_1, \dots, x_n\} \qquad y = \{y_1, \dots, y_n\}$
$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$
$|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| \qquad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$

Erinnerung: $(v_1 < \cdot, \cdot >) \leftarrow$ Vektorraum mit Spatprodukt.

$$|v| := \sqrt{< v, v >} \Rightarrow |v + w| \leq |v| + |w|$$

Beispiel 3.14: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n \qquad < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$

$|x| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$|p_i(x) - p_i(y)| = |x_i - y_i| \leq \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} = |x - y|$

Beispiel 3.15: Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $f : X \to \mathbb{R}^n$ gegeben. Seien $f_1(x), \dots, f_n(x) \in \mathbb{R}$ die Koordinaten des Vektor $f(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$

Behauptung: f ist stetig $\Leftrightarrow f_i$ ist stetig $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$
$\Rightarrow$: $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{p_i} \mathbb{R}_{f_i}\} f_i = p_i \circ f \qquad f_i, p_i$ stetig $\Rightarrow f_i$
$\Leftarrow$: Wir nehmen an, dass $f_i, \dots, f_n$ stetig sind an der Stelle x_0. Wir wollen zeigen, dass f stetig

ist an der Stelle x_0. Sei $\varepsilon > 0$. Da f_i stetig ist in x_0 $\exists\ \delta_i > 0$ so dass $\forall\ x \in X\ d(x, x_0) < d_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall\ i = 1, 2, \cdots, n$
Sei $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\} > 0$ dann gilt $\forall\ x \in X : \mathrm{d}(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sum(f_i(x) - f_j(x_0))^2 < \sum\limits_1^n \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2 \Rightarrow |f_1(x) - f(x_0)| - \sqrt{\sum(f(x) - f(x_0))^2} < \varepsilon$

Beispiel 3.16: $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad f(z_1, z_2) = z_1 z_2 \qquad X = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \qquad z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$
$f = \Re(f) + i\Im(f) \qquad \Re(f), \Im(f) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$
$\Re f(z_1, z_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 \qquad \Im f(z_1, z_2) = x_1 y_2 - y_1 x_2$
Wir wissen das $\Re(f), \Im(f)$ stetig sind $\overset{B.3.15}{\to}$ f ist stetig

Beispiel 3.17: $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C} \qquad f(z) = \frac{1}{z}$
$\Re f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \Im f(z) = \frac{-y}{x^2+y^2}$
$\Rightarrow \Re f(z), \Im f(z) : \mathbb{C}\backslash 0 \to \mathbb{R} \overset{B.3.15}{\Rightarrow} f$ ist stetig

Beispiel 3.18: $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad f(z_1, z_2) = z_1 + z_2 \Rightarrow$ stetig (wie oben)

Beispiel 3.19: Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \qquad b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$
Sei $\Omega := \{z \in \mathbb{C} | q(z) = 0\} \qquad q(z) = b_0 + b_1 z^1 + \cdots + b_n z^n$
$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$
$f : \Omega \to \mathbb{C}, f(z) := \frac{p(z)}{q(z)} \Rightarrow f$ ist stetig
$f[a, b] \to \mathbb{R} \qquad a < b$
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

2. Zwischenwertsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so dass $a < b$, seien $f[a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Sei $c \in \mathbb{R}$ so dass $f(a) \leq c \leq f(b) \Rightarrow \exists\ x \in [a, b]$ so dass $f(x) = c$

Beweis: Wir benutzen das Vollständigkeitsaxiom für die reellen Zahlen. Sei $A := \{\alpha \in \mathbb{R} | \forall\ x \in [a, b] : x \in \alpha \Rightarrow f(x) < c\}$
Sei $B := \{\beta \in \mathbb{R} | \quad \exists x \in [a, b]$ so dass $x \leq \beta$ und $f(x) \geq c\}$
$\Rightarrow$

- $\mathbb{R} = A \cup B, A \cap B = \emptyset$
- $\alpha \in A, \alpha' \leq \alpha \Rightarrow \alpha' \in A$
- $\beta \in B, \beta' \geq \beta \Rightarrow \beta' \in B$
- $a \in A, b \in B$

$\overset{\text{Voll.Ax.}}{\Rightarrow} \exists \quad x_0 \in \mathbb{R}$ so dass $A \subset (-\infty, x_0] \quad B \subset [x_0, \infty)$

Behauptung 1: $a \leq x_0 \leq b$

Behauptung 2: $f(x_0) = c$

Beweis (von 1): $a \in A \subset (-\infty, x_0]$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \forall\ a \in A \text{ gilt } \alpha \leq x_0 \\ \Rightarrow \forall\ a \leq x_0 \end{array}\right\} \text{gleiches gilt für } b$$

Beweis (von 2): (Durch Widerspruch). Angenommen $f(x_0) \neq c$ dann gilt entweder $f(x_0) < c$ oder $f(x_0) > 0$

Fall 1: $f(x) < c \qquad$ sei $\varepsilon = \frac{c - f(x_0)}{2} > 0$
Da f stetig ist an der Stelle x_0 existiert ein $\delta > 0$, so dass für jedes $x \in [a, b]$ folgendes gilt: $[x - x_0] < delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0) < \varepsilon \quad \forall\ x \in [a, b]$ so dass $[x - x_0] < \delta$ gilt $f(x) - f(x_0) \leq$

$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \qquad f(x) < f(x_0)+\varepsilon = f(x_0)+\frac{c-f(x_0)}{2} = \frac{c}{2}+\frac{f(x_0)}{2} < c$. Hieraus folgt $x_0+\delta \in A$
zu zeigen: $\forall\, x \in [a,b]$ gilt $x \leq x_0+\delta \Rightarrow f(x) < c$

(i) $x \leq x_0$, dann ist $f(x) < c$ (andernfalls wäre $x \in B'$)
(ii) $x_0 \leq x \leq x_0+\delta \Rightarrow |x-x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) < c \Rightarrow$ also gilt $\sqrt{x_0+\delta \in A}$!

Fall 2: $f(x_0) > c \qquad \varepsilon = \frac{f(x_0)-c}{2}$
wähle δ so dass $|x-x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ Dann gilt $\forall\, x \in [a,b] \quad |x-x_0| \in \delta \Rightarrow f(x) > c$
$x_0-\delta \in B$!

3. Zusammenfassung

1 Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeben, und $x_i \in \mathbb{R}$. f heisst stetig an der Stelle x_0, wenn $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$, so dass $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

2 Angenommen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ erfüllt die Bedingung $\exists\, C > 0$ so dass

$$|f(x_0)-f(x_1)| \quad \leq \quad C\,|x_0-x_1| \qquad \natural$$

für alle $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$, dann heisst f Lipschitzstetig.

3 Ein metrischer Raum ist ein Paar (X,d), wobei X eine Menge ist, und $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ eine Abbildung, die folgende Eigenschaften hat.

- $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in X$
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall\, x,y \in X$
- $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$

4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist (Ω,d) ein metrischer Raum, wobei $d(x,y) := |x-y|\ \forall\ x,y \in \Omega$ die euklidische Norm genannt wird.

5 Seien (X,d_x), (Y,d_y), (Z,d_z) drei metrische Räume und $f : X \mapsto Y\ \ g : Y \mapsto Z$ stetige Funktionen, dann ist die Funktion $g \circ f : X \mapsto Z$ ebenfalls stetig.

6 Sei (X,d) ein metrischer Raum und $f_1, f_2 : X \mapsto \mathbb{R}$ und $f : X \mapsto \mathbb{R}\backslash\{0\}$ seien stetige Funktionen, dann sind die Funktionen f_1+f_2, $f_1 \cdot f_2$, $\frac{1}{f} : X \mapsto \mathbb{R}$ stetig.

7 Seien $a,b \in \mathbb{R}$ so dass $a < b$, seien $f[a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Sei $c \in \mathbb{R}$ so dass $f(a) \leq c \leq f(b) \Rightarrow \exists\, x \in [a,b]$ so dass $f(x) = c$

KAPITEL 4

Konvergenz & Folgen

1. Konvergenz

Definition: [V11-031201] Sei $\mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \to x_n$ eine Folge reeller Zahlen. Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir sagen x_n *konvergiert gegen* x wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \varepsilon$$

Wenn dies gilt, so nennen wir x den *Limes* oder den *Grenzwert* der Folge x_n.

Grenzwert: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$	$x_n \in \mathbb{R}$	(23)

Bezeichnung:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \lim_{n\to\infty} x_n \\ x_n & \to & x \end{array}$$

Beispiel 4.1: $x_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$. Dann gilt $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, also

$$n \geq n_0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n}}_{|x-x_n|} < \varepsilon$$

Beispiel 4.2: Sei $r_n > 0$ so dass

$$\lim_{n\to\infty} r_n \quad = \quad 0$$

Sei $x_n \in \mathbb{R}$ eine Folge und $C > 0$, so dass

$$|x_n| \quad \leq \quad Cr_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\frac{\varepsilon}{C} > 0$.
Da $r_n \to 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $n \geq n_0 \Rightarrow r_n < \frac{\varepsilon}{C}$
Also: $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| \leq Cr_n < \varepsilon$

Beispiel 4.3: Sei $q \in \mathbb{R}$ so dass $|q| < 1$
Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n \quad = \quad 0$$

Beweis: $\frac{1}{|q|} > 1$. Sei $q \neq 0$ Sei $\delta := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + \delta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|q|^n} = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + \binom{n}{2}\delta^2 + \cdots + \delta^n \geq n\delta$$

$$\Rightarrow |q|^n \leq \frac{1}{n\delta}$$

$$\Rightarrow |q|^n \leq C\frac{1}{n}$$ Beispiel .4.3 für $r_n = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Lemma 16: Seien x_n, $y_n \in \mathbb{R}$ konvergente Folgen und sei

$$\begin{aligned} x_i &= \lim_{n\to\infty} x_n \\ y_i &= \lim_{n\to\infty} y_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Folgen $x_n + y_n$, x_n, y_n konvergieren und

$$\begin{aligned} x + y &= \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) \\ x \cdot y &= \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n \end{aligned}$$

Falls $x \neq 0$ dann konvergiert die Folge $\frac{1}{x_n}$ und

$$\frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n}$$

Beweis: Wir nicht geführt, mit Stetigkeit

Beispiel 4.4:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(5n-1)(n^2+3)}{(3n+7)^3} \\ &= \frac{(5-\frac{1}{n})(1+\frac{3}{n^2})}{(3+\frac{7}{n})^3} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}(5 - \frac{1}{n}) = 5$$

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{3}{n^2}) = 1$$

Nach Lemma 16

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{5\cdot 1}{3^3} = \frac{5}{27}$$

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $\mathbb{N} \to X : n \to x_n$ eine Folge in X und $n \in X$ Wir sagen x_n *konvergiert gegen* x wenn gilt $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

Konvergenz: $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$ (24)

Beispiel 4.5: Sei $z_n \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$z_n \to z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \Re(z_n) \to \Re(z) \\ \Im(z_n) \to \Im(z) \end{array}$$

Beispiel 4.6: Sei $q \in \mathbb{C}$ so dass $|q| < 1$
Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n \quad = \quad 0$$

(genau wie im Beispiel 4.3)

Satz 7: Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume und $f : X \mapsto Y$ eine Abbildung. Sei $x_0 \in X$ dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig an der Stelle x_0

(ii) Wenn $x_n \in X$ eine Folge ist, die gegen x_0 konvergiert, dann konvergiert die Folge $f(x_n) \in Y$ gegen $f(x_0)$

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei f stetig an der Stelle x.
Sei $x_n \in X$ so dass $x_n \to x_0$
Zu zeigen: $f(x_n) \to f(x_0)$.
Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist an der Stelle x_0 gilt:
$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in X$:

$$d_x(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Da $x_n \to x$ gilt: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d_x(x_n, x_0) < \delta$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} n \geq n_0 & \Rightarrow & d_x(x_n, x_0) < \delta \\ & \Rightarrow & d_y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon \end{array}$$

Also konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$ $\square$

$(ii) \to (i)$:

Indirekter Beweis: $\neg(i) \to \neg(ii)$: Angenommen f ist nicht stetig an der Stelle x_0

Nebenbemerkung:

$$\begin{array}{rcl} f \text{ stetig in } x_0 & \Leftrightarrow & \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in X \\ & & d_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \\ f \text{ nicht stetig in } x_0 & \Leftrightarrow & \exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x \in X \text{ so dass} \\ & & d_x(x, x_0) < \delta, d_y(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon \quad (*) \end{array}$$

f ist nicht stetig im Punkt x_0.
Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt dass $(*)$ gilt. Wir wählen $\delta = \frac{1}{n}$ in $(*)$.

$\Rightarrow$ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_n \in X$ so dass $d_x(x_n, x_0) < \frac{1}{n}, d_y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$ aber $f(x_n) \xrightarrow{nicht} f(x_0)$ $\square$

Bemerkung: Seien $x_n \in X$ und $x \in X$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d_x(x_n, x) = 0$$

Definition: Eine Folge $x_n \in \mathbb{R}$ heisst *monoton wachsend* (bzw.) *fallend*, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n \geq x_{n-1}$ (bzw.) $x_n \leq x_{n-1}$
x_n heisst *beschränkt* wenn es eine Zahl $x > 0$ gibt, so dass $|x_n| \leq C$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Satz 8: Jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.

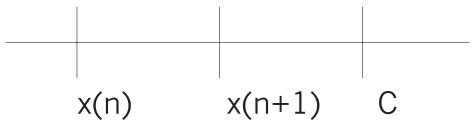


Abbildung 1. monoton wachsende, beschränkte Folge

Beweis: Sei $x_n \in \mathbb{R}$ eine beschränkte monoton wachsende Folge.

zu zeigen: $\exists\, x \in \mathbb{R}$ so dass $x_n \to x$
Sei $A := \{a \in \mathbb{R} |\ \exists\, n \in \mathbb{N}$ so dass $x_n > a\}$
Sei $B := \{b \in \mathbb{R} |\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \leq b\}$
$\Rightarrow \mathbb{R} = A \cup B,\ A \cap B = \emptyset,\ A = \emptyset,\ B = \emptyset$

$$\begin{array}{rcl} a \in A, a' \leq a & \Rightarrow & a' \in A \\ b \in B, b' \geq b & \Rightarrow & b' \in B \\ & \underbrace{\Rightarrow}_{Vollst.Ax.} & \exists\, x \in \mathbb{R} \text{ so dass } A \subset (-\infty, x] \quad B \subset [x, \infty) \end{array}$$

Behauptung: $x_n \to x$

Sei $\varepsilon > 0$

$$\begin{array}{rl} \Rightarrow & x + \varepsilon \notin A \\ & x - \varepsilon \notin B \\ \Rightarrow & x + \varepsilon \in B \\ & x - \varepsilon \in A \\ \Rightarrow & \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } x - \varepsilon < x_{n_0} \\ \Rightarrow & \forall\, n \geq n_0 : x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x + \varepsilon \\ \Rightarrow & \forall\, n \geq n_0 \text{ gilt } |x_n - x| \leq \varepsilon \quad \Box \end{array}$$

[V12-061201]

Beweis (Zwischenwertsatz): $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig
$f(a) < c < f(b)$
$\Rightarrow \exists\, x \in [a, b]$ s.d. $f(x) = c$

Beweis: Wir definieren zwei Folgen a_n, b_n wie folgt

$$a_0 := a \qquad\qquad b_0 := b$$

Wir nehmen an a_n, b_n seien gegeben so dass $a_n < b_n$ und $f(a_0) < c \leq f(b_0)$ Wir definieren

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n, & \text{falls } f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq c \\ \frac{a_n+b_n}{2}, & \text{falls } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < c \end{cases}$$

$$b_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2}, & \text{falls } f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq c \\ b_n, & \text{falls } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < c \end{cases}$$

Dann gilt:

(1) $a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b$
(2) $f(a_n) < c \leq f(b_n) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$
(3) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \qquad \forall\, n \geq 0$

Satz 9: $\Rightarrow$ Die Folgen a_n und b_n konvergieren. Ausserdem konvergiert die Differenz $b_n - a_n$ gegen 0.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} b_n = x \\
\Rightarrow\quad f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(a_n) \\
&\leq c \\
&\leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) \\
&= f(\lim_{n\to\infty} b_n) \\
&= f(x) \\
\Rightarrow\quad f(x) &\leq c \leq f(x) \\
\Rightarrow\quad f(x) &= c
\end{aligned}$$

BEMERKUNG: Falls $\psi_n \in \mathbb{R}$ eine konvergente Folge ist, so dass

$$\begin{aligned}
\psi_n &\geq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \psi_n &\geq 0
\end{aligned}$$

Beweis: *siehe Übung*

2. Supremum

$X \subset \mathbb{R}$ heisst *nach oben beschränkt*, wenn es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x \leq b \quad \forall\, x \in X$

Beispiel 4.7: $X =]1, 3[= \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 3\}$

Eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ heisst *obere Schranke* von X, falls $x \leq b \quad \forall\, x \in X$. Eine Zahl $b_0 \in \mathbb{R}$ heisst *Supremum* von X, oder *kleinste obere Schranke* von X falls.

(i) b_0 ist eine obere Schranke von X
(ii) Falls $b \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von X ist, so gilt $b_0 \leq b$

Satz 10: Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Beweis: Sei
$B := \{b \in \mathbb{R} \quad | \forall\, x \in X \text{ gilt } x \leq b\}$ (Menge der oberen Schranken von X)
$A := \{a \in \mathbb{R} \quad | \exists\, x \in X \text{ so dass } x > a\}$

$\Rightarrow$ $A \cup B, A \cap B = \emptyset$
$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
$a' \leq a \in A \Rightarrow a' \in A$
$b' \geq b \in B \Rightarrow b' \in B$
$\overset{Voll.Ax}{\Rightarrow}$ $\exists\, b_0 \in \mathbb{R}$ so dass $A \subset (-\infty, b_0], B \subset [b_0, \infty)$.
$\Rightarrow$ $b_0 \notin A$, sonst gäbe es ein $x \in X$
so dass $b_0 < xundx < a$ Dann gibt es aber auch ein $\delta > 0$
so dass $b_0 + \delta < x$;
also ist $b_0 + \delta \in A$. Widerspruch
$\Rightarrow$ $b_0 \in B$
$\Rightarrow$ b_0 ist eine obere Schranke von X und $b_0 \leq b$
für jede obere Schranke von X
$\Rightarrow$ b_0 ist Supremum von X

Bemerkung: Es gibt *genau ein Supremum*

Bezeichnung:

Supremum: $b_0 := \sup X = \sup_{x \in X} x$ (25)

3. Teilfolgen

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ negativ} \\ 1, & \text{falls } n \text{ positiv} \end{cases}$$

Abbildung 2. Die Folge alterniert zwischen 0 und 1

Definition: Sei X eine Menge. Sei $\mathbb{N} \to X : n \mapsto x_n$ eine Folge von X. Eine *Teilfolge* von x_n ist eine Folge der Form $\mathbb{N} \to X : k \mapsto y_k = x_{n_k}$, wobei $n_k \in \mathbb{N}$ eine Folge natürlicher Zahlen ist, so dass $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ (d.h. $n_k < n_{k+1} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$).

Beispiel 4.8: $y_k := x_{2k}$

Satz 11: (*Bolzano- Weierstrass*) Jede beschränkte Folge reeler Zahlen hat eine kovergente Teilfolge.

Beweis: Sei $x_n \in \mathbb{R}$ eine *beschränkte* Folge. Dann gibt es reele Zahlen a, $b \in \mathbb{R}$ so dass $a < b$ und $a \leq x_n \leq b \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; L := b - a$ (Länge des Intervalls)

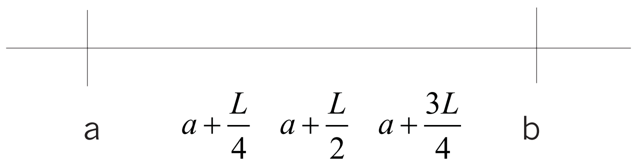


Abbildung 3. Einteilung der Intervalle

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ teilen wir das Intervall $[a, b]$ in 2^k gleiche Teile mit Randpunkten

$$a + \frac{jL}{2^k}, \qquad j = 0, \ldots, 2^k$$

Wir wählen eine Zahl

$$a_k = a + \frac{j_k L}{2^k}$$

(1) $j_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$
(2) $a_k \le a_{k+1} \le a_k + \frac{L}{2^{k+1}}$
d.h. $a_{k+1} = a_k$ oder $a_{k+1} = a_k + \frac{L}{2^{k+1}}$
(3) Es gibt unendlich viele Elemente $n \in \mathbb{N}$, so dass $a_k \le x_n \le a_k + \frac{L}{2^k}$

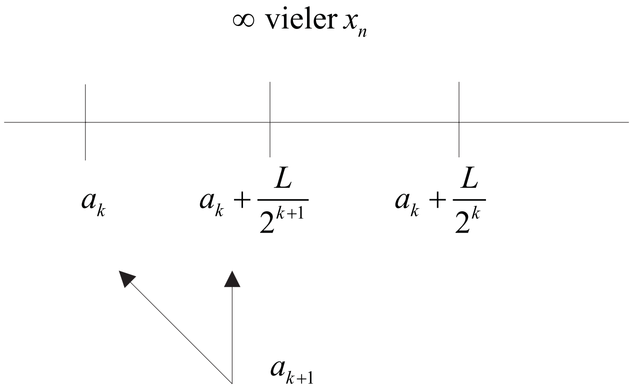


Abbildung 4

Wir wählen eine Folge $n_k \in \mathbb{N}$, so dass
(i) $a_k \le x_{n_k} \le a_k + \frac{L}{2^k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$
(ii) $n_{k+1} > n_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & a_k \le a_{k+1} < b \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \\
& |x_{n_k} - a_k| \le \tfrac{L}{2^k} \\
\Rightarrow \quad & \text{Die Folge } a_k \text{ konvergiert} \\
& \lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - a_k) = 0 \\
\overset{S.9}{\Rightarrow} \quad & \text{Die Folge } x_{n_k} \text{ konvergiert.} \quad \square
\end{aligned}
$$

Satz 12: Sei $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ so dass $f(x_0) \ge f(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$.
$\exists\, y_0 \in [a, b]$, so dass $f(y_0) \le f(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$.

Bezeichnung: $\emptyset \ne X \subset \mathbb{R}$ heisst *von unten beschränkt.* Dann ist das *Infimum* von X die *grösste untere Schranke*

Infimum: $\inf X = \inf_{x\in X} x$ (26)

Übung: Geben sie genaue Definitionen. *Siehe Anhang 1 auf Seite 190*

[V13-101201]

Satz 13: Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es Punkte $x_0, y_0 \in [a, b]$, so dass

$$f(x_0) \le f(x) \le f(y_0) \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Beweis: Schritt 1: Die Funktion f ist beschränkt, d.h. $\exists\, c > 0$, so dass

$$|f(x)| \le c \quad \forall\, x \in [a, b]$$

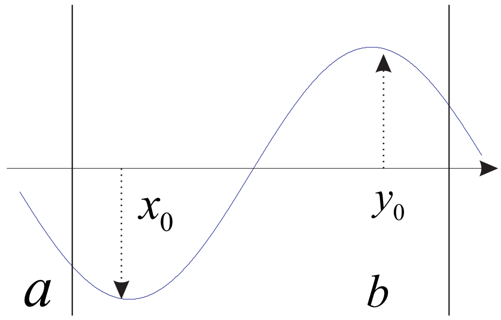


ABBILDUNG 5

Wir beweisen Schritt 1 mit einem Widerspruchsargument: Angenommen f ist nicht beschränkt

$$\begin{array}{rl}
\Rightarrow & \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in [a,b] \text{ so dass } |f(x_n)| \geq n \\
\overset{Satz}{\Rightarrow} & \text{Die Folge } x_n \text{ hat eine konvergente Teilfolge} \\
& x_{n_k} \quad k = 1, 2, \ldots, n, \text{ sei } x := \lim_{n\to\infty} x_{n_k} \\
\Rightarrow & f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \\
& \text{Wir wissen } |f(x_{n_k})| \geq n_k \geq k \\
& \text{Daher kann die Folge } f(x_{n_k}) \text{ nicht konvergieren. Widerspruch.}
\end{array}$$

SCHRITT 2: Existenz von y_0. Sei $M := \sup_{a\leq x\leq b} f(x)$ d.h.

(i) $f(x) \leq M \qquad \forall\, x \in [a,b]$
(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in [a,b]$, so dass $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n)$

$$\begin{array}{rl}
\Rightarrow & \exists \text{ konvergente Teilfolge } x_{n_k} \to y_0 \\
\Rightarrow & f(y_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M \\
& M - \frac{1}{n_k} \leq f(x_{n_k}) \leq M
\end{array}$$

SCHRITT 3: Existenz von x_0. Genauso wie Schritt 2, oder f durch $-f$ ersetzen.

4. Reihen

„unendliche Summen“

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Was heisst das?

Definition: Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Die *Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty}$ heisst *konvergent*, wenn die Folge der *Partialsummen* $S_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert. In diesem Fall bezeichnen wir den Limes mit

$$\text{Limes } = \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Limes: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ (27)

Beispiel 4.9: GEOMETRISCHE REIHE: $q \in \mathbb{C}$, $\quad |q| \leq 1$, $\quad a_k := q^k$, $\quad k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} q^k &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q^k \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1}{1-q}\end{aligned}$$

Beispiel 4.10: HARMONISCHE REIHE: $a_k = \frac{1}{k} \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots.$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ S_{2n} - S_n &= \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}}_{n \text{ Summanden}} \\ &\geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow S_{2^r} &= \underbrace{S_1}_{1} + \underbrace{(S_2 - S_1)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{(S_4 - S_2)}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{(S_{2^n} - S_{2^{n-1}})}_{\geq \frac{1}{2}} \\ \Rightarrow S_{2^r} &\geq 1 + \frac{r}{2} \to \infty\end{aligned}$$

Beispiel 4.11: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$ konvergiert gegen $\ln(2)$

Beispiel 4.12:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Satz 14: Sei $c_k \geq 0$ eine monoton fallende Folge, die gegen 0 konvergiert.
$\Rightarrow$Die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$ konvergiert.

Beweis: 1.

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k \\ &= \underbrace{c_0 - c_1}_{\geq 0} + \underbrace{c_2 - c_3}_{\geq 0} + \dots + (-1)^n c_n \\ S_{2n+1} &= S_{2n-1} + \underbrace{c_{2n} - c_{2n+1}}_{\geq 0} \\ &\geq S_{2n-1}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}S_{2n} &= S_{2n-2} - \underbrace{c_{2n-1} + c_{2n}}_{\leq 0} \\ &\leq S_{2n-2}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}S_{2n} &= S_{2n-1} + c_{2n} \\ &\geq S_{2n-1}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} S_{2n} - c_{2n+1} &= S_{2n+1} \\ S_{2n} &\geq S_{2n+1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ S_{2n} \leq S_{2n-2} \leq S_{2n-4} \leq S_{2n-6} \leq \cdots \leq S_0$
$S_{2n} \geq S_{2n+1} \geq 2_{2n-1} \geq S_{2n-3} \geq S_{2n-5} \geq \cdots \geq S_1 = c_0 - c_1$
$\Rightarrow\ S_{2n+1} \leq S_0 = c_0$
$S_{2n} \geq S_1 = c_0 - c_1$
$\Rightarrow$ Die Folge $\{S_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt
Die Folge $\{S_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monton fallend und beschränkt
$\Rightarrow$ Beide Folgen S_{2n} und S_{2n+1} konvergieren.
$\Rightarrow$ Ausserdem gilt $S_{2n+1} - S_{2n} = -c_{2n+1} \to 0$
$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$
$\Rightarrow\ S_n$ konvergiert

Definition: Sei $a_k \in \mathbb{R}$, $\quad k = 1, 2, \ldots$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst *absolut konvergent* wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel 4.13: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$ konvergiert, aber ist nicht absolut konvergent.

Satz 15: Sei $a_k \in \mathbb{R}$ eine Folge, so dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Ausserdem hängt der Limes $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht ab von der Reihenfolge der a_k

Korollar 1: Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=1}^{\infty} b_l$ absolut konvergent. Dann gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{\infty} b_l\right) = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_k \cdot b_l \quad \text{(macht nur Sinn, wenn die Reihe absolut konvergent)}$$

Satz 16: Sei $a_k \in \mathbb{C}$, $\quad k = 1, 2, 3, \ldots$ und $C > 0$ und $0 < q < 1$, so dass

$$|a_k| \leq Cq^k \qquad \forall\, k \geq 0$$

$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut.

Beweis:

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} Cq^k \\ &= C \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{C}{1-q} \\ &\Rightarrow S_n \text{ konvergiert} \end{aligned}$$

[V14-131201]

Satz 17: Sei $c_k > 0$ eine monoton fallende Folge. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{l=0}^{\infty} 2^l \cdot c_{2^l} \text{ konvergiert}$$

Beispiel 4.14:

$$\begin{array}{rcll} c_k & = & \frac{1}{k} & \\ \sum_{l=1}^{\infty} 2^l \cdot c_{2^l} & = & \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l}{2^l} & \\ & = & \sum_{l=0}^{\infty} 1 & \text{divergiert} \\ & \Rightarrow & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} & \text{divergiert} \end{array}$$

Beispiel 4.15:

$$c_k = \frac{1}{k^{1+\delta}} \qquad \delta > 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} 2^l c_{2^l} &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l}{(2^l)^{1+\delta}} && = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l}{2^{l+l\delta}} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l}{2^l \cdot 2^{l\delta}} && = \sum_{l=1}^{\infty} (\frac{1}{2^\delta})^l \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} q^l \qquad q = \frac{1}{2^\delta} < 1 \qquad \text{konvergiert} \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta}} \text{ konvergiert} \end{aligned}$$

Korollar 2: Sei $a_k \in \mathbb{C}$ und $C > 0$, $\delta > 0$ so dass

$$|a_k| \leq C \cdot \frac{1}{k^{1+\delta}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis (Satz 17): Folgen der Partialsummen.

$$\begin{array}{rcl} s_n & := & \sum_{k=0}^{n} c_k \\ r_n & := & \sum_{l=0}^{n} 2^l c_{2^l} \end{array}$$

Beide Folgen sind monoton wachsend.

Zu zeigen: Die Folge s_n ist beschränkt genau dann wenn die Folge r_n beschränkt.

$$\begin{array}{rrl} & s_{2^l} - s_{2^{l-1}} & = c_{2^{l-1}+1} + c_{2^{l-1}+2} + \cdots + c_{2^{l-1}+2^{l-1}} \\ \Rightarrow & 2^{l-1} c_{2^l} & \leq s_{2^l} - s_{2^{l-1}} \leq 2^{l-1} c_{2^{l-1}} \qquad \text{(Summe über } l = 1, \ldots, n) \\ & \sum_{l=1}^{n} 2^{l-1} c_{2^l} & \leq S_{2^n} - S_1 \leq \sum_{l=1}^{n} 2^{l-1} s_{2^{l-1}} \\ \Rightarrow & \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} 2^l c_{2^l}}_{\frac{1}{2}(r_n - c_1)} & \leq s_{2^n} - c_0 - c_1 \leq \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} 2^l c_{2^l}}_{r_{n-1}} \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} r_n & \leq \frac{1}{2} r_n + c_0 + \frac{1}{2} c_1 \\ & & \leq s_{2^n} \\ & & \leq r_{n-1} + c_0 + c_1 \end{array}$$

Die Folge r_n ist beschränkt genau dann wenn die Folge S_{2^n} beschränkt ist, genau dann wenn die Folge s_n beschränkt ist. □

Beispiel 4.16: Die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \qquad s > 1$$

heisst *Riemann'sche Zeta-Funktion*

$$\zeta(2) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{2} \qquad \text{Euler}$$

Beispiel 4.17:

$$f(\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\phi)}{2^k}$$

$$\left|\frac{\cos(k\phi)}{2^k}\right| \leq \frac{1}{2^k}$$

$\overset{\text{Satz}}{\Rightarrow}$ die Reihe konvergiert

Berechnung des Limes:

$$\begin{aligned} f(\phi) &= \Re\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik\phi}}{2^k}\right) \\ &= \Re\left(\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{e^{i\phi}}{2})^k\right) \\ &= \Re\left(\frac{1}{1 - e^{1\phi}/2}\right) \\ &= \Re\left(\frac{1 - e^{-i\phi/}/2}{(1 - e^{i\phi}/2)(1 - e^{-i\phi}/2)}\right) \\ &= \frac{1 - (\cos\phi)/2}{1 - \cos\phi + 1/4} \\ &= \frac{4 - 2\cos\phi}{5 - 4\cos\phi} \end{aligned}$$

Satz 18: Sei $0 \neq a_k \in \mathbb{C}$ eine Folge so dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \rho \qquad \forall\, k \geq k_0$$

wobei $\rho \in \mathbb{R}$, $0 < \rho < 1$
$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut.

Beweis:

$$\begin{aligned} |a_{k+1}| &\leq \rho\,|a_k| \quad \forall\, k \geq k_0 \\ |a_k| &\leq \rho^{k-k_0}\,|a_{k_0}| \quad k \geq k_0 \end{aligned}$$

Sei $C := \max_{0 \leq k \leq k_0} \rho^{-k}\,|a_k| > 0$.

$\Rightarrow\ |a_k| \leq C\rho^k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$ Da $\rho < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut $\square$

Beispiel 4.18:

$$\begin{aligned} a_k = \frac{x^k}{k!} \cdot &\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \\ &= \left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k}\right| \\ &= \frac{|x|}{k+1} \leq \frac{1}{2} \qquad \forall\, k \geq 2\,|x| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{C}$. Die Reihe $\exp(x) := e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ heisst *Exponentialfunktion.*

Exponentialfunktion: $\exp(x) := e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (28)

Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

wobei $a_k \in \mathbb{C}$

Potenzreihe: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ (29)

FRAGE: Für welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ konvergiert diese Reihe? Für $z = 0$ trivialerweise.

Satz 19: (i) Es gibt genau eine Zahl ρ, so dass $0 \leq \rho \leq \infty$ und die Potenzreihe absolut konvergiert für $|z| < \delta$ und divergiert für $|z| > \delta$

(ii) Die Zahl ρ ist gegeben durch

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{N\to\infty} \sup_{n \geq N} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(iii) Falls die Folge $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ konvergiert, so ist

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Die Zahl ρ heisst *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Beispiel 4.19:

$$\begin{array}{ll} a_n = 1 & \rho = 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} & |z| < 1 \end{array}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$

Beispiel 4.20: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \qquad \delta = 1$

$$|z| = 1 \begin{cases} z = 1 & \textit{divergenz} \\ z = -1 & \textit{konvergenz} \end{cases}$$

Beispiel 4.21: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n \qquad \delta = 1 \qquad |z| = 1$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ konvergiert absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$

Beweis (Satz 19): Sei

$$a_n := \sup_{n \geq \mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Es gilt: $a_{N+1} \leq a_N$ für alle N

Fall A: $\alpha_1 = \infty$. Dann gilt $\alpha_n = \infty \quad \forall\, N$. Dann ist $\rho = 0$
Fall B: $\alpha_1 < \infty$. Dann gilt $\rho > \infty \quad \frac{1}{\rho} = \lim_{N\to\infty} \alpha_N$

BEHAUPTUNG: (i) Gilt mit $\rho = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\alpha_N}$

$|z| < \rho \Rightarrow \rho \neq 0 \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow$ Fall A ausgeschlossen $\Rightarrow \alpha_N < \infty \quad \forall\, N$

$$\begin{array}{lrcl} \Rightarrow & \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } |z| & < & \frac{1}{\alpha_{N_0}} \\ \Rightarrow & \alpha_{N_0}\,|z| & < & 1 \\ \Rightarrow & |a_n z^n| & = & |a_n| \cdot |z|^n = \left(\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z|\right)^n \quad \forall\, n \geq N_0 \\ & \leq (\alpha_{N_0}\,|z|)^n & = & r^n \\ \Rightarrow & \text{Die Reihe } \sum a_n z^n \text{ konvergiert absolut} & & \end{array}$$

[V15-171201]

$$(*) \sum_{k=0}^{\infty} a_k^k$$

$$\alpha_N := \sum_{n \geq N} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\rho := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\alpha_N}$$

(i) $|z| < \rho \Rightarrow (*)$ konvergiert absolut ✓

(ii)

$$\begin{array}{lll} |z| > \rho & \Rightarrow & (*) \text{ divergiert} \\ |z| > \rho & \Rightarrow & \exists\, r > 1 \text{ so dass } |z| > r\rho = \lim_{N \to \infty} \frac{r}{\alpha_N} \\ & \Rightarrow & \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, N \geq N_0 \\ & & \frac{r}{\alpha_N} < |z| \\ & \Rightarrow & \forall\, N \geq N_0 \\ & & r < \alpha_N\,|z| = \sup_{n \geq N} \sqrt[n]{a_n}\,|z| \\ & \Rightarrow & \forall\, N \geq N_0 \quad \exists\, N \geq N \text{ so dass } r < \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| \\ & \Rightarrow & \forall\, N \geq N_0 \quad \exists\, N \geq N \\ & & r^n < |a_n|\,|z|^N = |a_n z^n| \\ & \Rightarrow & \exists \text{ Folge } n_k \to \infty \text{ so dass } r^{n_k} < |a_{n_k} z^{n_k}| \\ & \Rightarrow & r^{n_k} < a_{n_k} z^{n_k} \to \infty \\ & \Rightarrow & (*) \text{ divergiert} \end{array}$$

(iii) Wir nehmen an, die Folge $r_n := \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ konvergiert. Sei $r := \lim_{n \to \infty} r_n$. Wir nehmen an $0 < r < \infty$

Behauptung: $r = \rho$

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ |z| < r \Rightarrow (*) \text{ konvergiert absolut} \\ 2.\ |z| > r \Rightarrow (*) \text{ divergiert} \end{array}\right\} \Rightarrow r = \rho$$

(1) $|z| < r$

$$
\begin{array}{ll}
\Rightarrow & \exists\,\lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < 1 \text{ so dass } |z| < \lambda r \\
\Rightarrow & \exists\, n_0 < \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0 \\
 & |z| < \lambda r_n = \lambda \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\
\Rightarrow & \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0 \\
 & |a_{n+1}|\,|z| < \lambda\,|a_n| \\
\Rightarrow & \forall\, n \geq n_0 \\
 & \left|a_{n+1} z^{n+1}\right| < \lambda\,|a_n z^n| \\
\Rightarrow & \forall\, n > n_0 \\
 & |a_n z^n| < \lambda^{n-n_0}\,|a_{n_0} z^{n_0}| \\
\Rightarrow & \forall\, n \geq n_0 \text{ gilt } |a_n z^n| \leq C_0 \lambda^n \text{ wobei } C_0 = \lambda^{-n_0}\,|a_{n_0} z^{n_0}| \\
 & \text{Sei } C := \max_{0 \leq n \leq n_0} \lambda^{-n}\,|a_n z^n| \\
\Rightarrow & \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |a_n z^n| \leq C\lambda^n \\
\overset{\text{S.16 p45}}{\Rightarrow} & \text{Die Reihe } (*) \text{ konvergiert absolut}
\end{array}
$$

(2) $|z| > r$

$$
\begin{array}{ll}
\Rightarrow & \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_0 \\
 & |z| > r_n = \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\
 & \forall\, n \geq n_0 \qquad |a_{n+1} z| > |z| \\
\Rightarrow & \forall\, n \geq n_0 \qquad \left|a_{n+1} z^{n+1}\right| > |a_n z^n| \\
\Rightarrow & \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, n \geq 1 \qquad |a_n z^n| \geq \delta \\
\Rightarrow & \text{Die Reihe } (*) \text{ divergiert} \qquad \square
\end{array}
$$

Beispiel 4.22:

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad (**) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Was ist der Konvergenzradius dieser Reihe?

$$
\begin{array}{ll}
 & \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1/n!}{1/n+1!} = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \to \infty \\
\overset{S.19}{\Rightarrow} & \rho = \infty \\
 & \text{Das heisst die Reihe } (**) \text{ konvergiert absolut für jedes } z \in \mathbb{C}
\end{array}
$$

Die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$ heisst *Exponentialfunktion*

Satz 20: (i) $\exp(z + n) = \exp(z) + \exp(n) \qquad \forall\, z, n \in \mathbb{C}$

(ii) Die Exponentialfunktion ist stetig

Beweis: (i) $\exp(z + w)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{j}}_{\frac{n!}{j(n-j)!}} z^j w^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{n}{j!(n-j)!} z^j w^{n-1}$$

Diese Reihe konvergiert absolut

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} z^j w^k$$

(Grenzwert ist unabhängig von der Reihenfolge

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \underbrace{(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} w^k)}_{\exp(w)} z^j$$

$$= \underbrace{(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!})}_{\exp(z)} \exp(w)$$

$$= \exp(z) \cdot \exp(w)$$

(ii) *Stetigkeit* exp ist stetig an der Stelle $z = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ s.d. $\delta \leq \frac{1}{2}$, $2\delta < \varepsilon$. Dann gilt $\frac{\delta}{1-\delta} \leq 2\delta < \varepsilon$

$|z|\, \delta \Rightarrow |e^z - 1|$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!} < \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n = \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

Stetigkeit an der Stelle z:

$$\begin{array}{rll} & z_n \to z & \\ \Rightarrow & z_n - z \to 0 & \\ \Rightarrow & \exp(z_n - z) \to \exp(0) = 1 & \\ \Rightarrow & \exp(z_n) & = \exp(z)\exp(z_n - z) \to \exp(z) \\ & & = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \end{array}$$

Abkürzungen:

$$\begin{array}{rcl} e & := & \exp(1) \\ & = & 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \\ & = & 2.718 \end{array}$$

$n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} \exp(n) & = & \exp \overbrace{(1 + \cdots + 1)}^{n} \\ & = & \underbrace{\exp(1)}_{e} \cdot \exp(1) \cdot \ldots \cdot \exp(1) \\ & = & e^n \end{array}$$

Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad p, q \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & \exp(\frac{p}{q})^q & = & \exp(\frac{p}{q}) \cdot \ldots \cdot \exp(\frac{p}{q}) \\ & & = & \exp(\overbrace{\frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}}^{q}) \\ & & = & \exp(p) \\ & & = & e^p \\ \Rightarrow & \exp(\frac{p}{q} & = & \sqrt[q]{e^p} = e^{p/q} \end{array}$$

SCHREIBWEISE:

$e^z := \exp(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \qquad (30)$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^t \end{aligned}$$

Satz 21: (i) $e^t > 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$
(ii) $s < t \Rightarrow e^s < e^t \qquad \forall\, s, t \in \mathbb{R}$
(iii) $\lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t!} = 0$
(iv) $\lim_{t\to\infty} t^{-p} e^t = \infty \qquad \forall\, p \in \mathbb{N}$

Beweis: (i) $e^0 = 1$

$$\begin{array}{lll} t > 0 & \Rightarrow & e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2!} + \cdots > 1 \\ t < 0 & \Rightarrow & e^t \cdot e^{-t} = e^{t-t} = e^0 = 1 \\ & \Rightarrow & e^t = \frac{1}{e^{-t}} > 0 \\ & & -t > 0 \end{array}$$

(ii) $s < t$

$$\Rightarrow \quad e^{t`} = e^s \cdot \underbrace{e^{t-s}}_{>1} > e^s$$

$t - s > 0$, daher $e^{t-s} > 1$

(iii) $t \geq 0 \qquad \forall\, q \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rrcl} & e^t & = & 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{q+1}}{(q+1)!} + \cdots \\ & & \geq & \frac{q^{q+1}}{(q+1)!} \\ \Rightarrow & \frac{e^t}{t^q} & \geq & \frac{t}{(q+1)!} \overset{t\to\infty}{\to} \infty \\ \Rightarrow & \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t^q} & = & \infty \end{array}$$

(iv) Aus *(iii)* folgt

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to\infty} \frac{t^q}{e^t} & = & 0 \\ & = & \lim_{t\to\infty} t^q e^{-t} \\ & = & \lim_{t\to\infty} (-t)^q e^t \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} t^q e^t & = & 0 \qquad \square \end{array}$$

Korollar 3: $\exp \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *ist bijektiv*

Beweis: *siehe Übung*

Die Umkehrfunktion von $\exp \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bezeichnen wir mit

$$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

d.h. Für jedes $x > 0$ ist $t := \log(x)$ die eindeutige reelle Zahl für die gilt $e^t = x$. Dann gilt
(i) $e^{\log(x)} = x \quad \forall\, x > 0$
(ii) $\log(e^t) = t \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

Korollar 4: $\forall\, x, y > 0$

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\log(xy) &\overset{(1)}{=} \log(e^{\log x} \cdot e^{\log y}) \\ &\overset{Satz 20}{=} \log(e^{\log x + \log y}) \\ &\overset{(2)}{=} \log x + \log y \quad \square\end{aligned}$$

Korollar 5: $a > 0$, $\forall\, q \in \mathbb{Q} \Rightarrow \log(a^{p/q}) = \frac{p}{q} \log(a)$

Beweis:

$$\begin{aligned}q \cdot \log(a^{p/q}) &= \overbrace{\log a^{p/q} + \log a^{p/q} + \ldots + \log a^{p/q}}^{qmal} \\ &= \log(a^p) \\ &= p \log(a)\end{aligned}$$

Korollar 6:

$$q > 0 \quad \forall\, \tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{p/q} = e^{p/q \log(a)}$$

Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$a^x := e^{x \log a}$$

$$a^x := e^{x \log a} \qquad (31)$$

ÜBUNG:

(1) $\log(a^x) = x \cdot \log(x)$
(2) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
(3) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
(4) $(a^x)^y = a^{xy}$

Satz 22: [V16-201201] Die Funktion $\log(0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig

Beweis: SCHRITT 1: log ist stetig an der Stelle $x_1 = 1$

ZU ZEIGEN: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad |x - 1| < \delta \Rightarrow |\log x| < \varepsilon$.
Gegeben sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$, so dass $\delta :\neq 1 - e^{-\varepsilon} > 0$. Dann gilt:

$$e^{-\varepsilon} = 1 - \delta$$

d.h.

$$-\varepsilon = \log(1 - \delta)$$

ausserdem

$$\begin{aligned}\delta < \delta e^{\varepsilon} &= (1-e^{-\varepsilon})e^{\varepsilon}\\ &= e^{\varepsilon}-1\\ \Rightarrow 1+\delta &< e^{\varepsilon}\\ \Rightarrow \log(1+\delta) &< \varepsilon\end{aligned}$$

zusammenfassend:

$$\begin{aligned}\log(1-\delta) &= -\varepsilon\\ \log(1+\delta) &< \varepsilon\end{aligned}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{array}{lllll} |x-1| < \delta & \Rightarrow 1-\delta & < x & < 1+\delta \\ & \Rightarrow \underbrace{\log(1-\delta)}_{-\varepsilon} & < \log(x) & < \underbrace{\log(1+\delta)}_{<\varepsilon} \\ & \Rightarrow -\varepsilon & < \log(x) & < \varepsilon \\ & \Rightarrow |\log(x)| & < \varepsilon & \end{array}$$

Schritt 2: Stetigkeit von log an einer beliebigen Stelle $x_0 > 0$ Sei $x_n > 0$ eine Folge, die gegen x_0 konvergiert

$$\begin{array}{rrcl} & \lim_{n\to\infty} x_n & = & x_0 \\ \Rightarrow & \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_0} & = & 1 \\ \Rightarrow & \lim_{n\to\infty} \log(\frac{x_n}{x_0}) & = & \log(1) = 0 \\ & \text{Dann ist } \log\left(\frac{x_n}{x_0}\right) & = & \log(x_n) - \log(x_0) \\ \Rightarrow & \lim_{n\to\infty}(\log(x_n) - \log(x_0)) & = & 0 \\ \Rightarrow & \lim_{n\to\infty} \log(x_n) & = & \log(x_0) \end{array}$$

Nach Satz 20 auf Seite 20 haben wir gezeigt, dass log stetig ist an der Stelle x_0, denn $\log = \exp^{-1}(0,\infty) \to \mathbb{R}$

Bemerkung: Seien $a < b$ und $a' < b'$. Wir bezeichnen

$$\begin{array}{ll} I & := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} = (a,b) \\ I' & := \{y \in \mathbb{R} \mid a' < y < b'\} = (a',b') \end{array}$$

Sei $f : I \to I'$ eine stetige, strikt monoton wachsende Funktion, so dass $f(I) = I'$. $f(I)$ ist stetig $\Rightarrow f' : I' \to I$ ist stetig. $\square$

$$\begin{array}{lll} e^{it} & = & \cos(t) + i\sin(t) \quad (*) \\ & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \exp(it) \end{array}$$

Warum gilt die Formel $(*)$?

Satz 23: Sei $0 < t < 2\pi$. $\Rightarrow$

(i) $\left|e^{it}\right| = 1$

(ii) Die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis von 1 bis e^{it} ist gleich t

Beweis: (i) Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rrcl} & \exp \overline{z} & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\exp z} \\ \Rightarrow & \overline{\exp(it)} & = & \exp(-it) \\ \Rightarrow & |\exp(it)|^2 & = & \exp(it)\overline{\exp(it)} = \exp(it)\exp(-it) = \exp(it-it) = 1 \end{array}$$

(ii) NÄHERUNGSWEISE:: Wir teilen den Bogen von 1 bis e^{it} in N gleiche Teile mit Randpunkte $e^{ikt/N}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N$.
Wir ersetzen den Bogen durch N gerade Strecken. Dann ist die Gesamtlänge dieser Stücke gegeben durch:

$$\begin{aligned}
L_n := &\sum_{k=1}^{N} \left| e^{ikt/N} - e^{i(k-1)t/N} \right| \\
= &\sum_{k=1}^{N} \left| e^{i(k-1)t/N} (e^{it/N} - 1) \right| \\
= &\sum_{k=1}^{N} \left| e^{i(k-1)t/N} \right| \left| e^{it/N} - 1 \right| \\
L_n = &\text{“näherungsweise Bogenlänge“} \\
= &N \left| e^{it/N} - 1 \right| \\
= &t \cdot \frac{\left| e^{it/N} - 1 \right|}{t/N} \\
= &t \cdot \underbrace{\left| \frac{e^{it} - 1}{it/N} \right|}_{\overset{!}{\to} 1}
\end{aligned}$$

Zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{it}{N}} - 1}{\frac{it}{N}} = 1$$

dann gilt:

$$\text{Bogenlänge} = \lim_{n\to\infty} L_n = t \qquad \square$$

Lemma 17:

$$\lim_{n\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

d.h. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$

$$0 < |z| < \delta \Rightarrow \left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| < \varepsilon$$

Beweis: Gegeben sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta > 0$, so dass $\delta < 1$ und $\frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$

$$\begin{aligned}\frac{e^z - 1}{z} - 1 &= \frac{1}{z}(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1) - 1\\ &= \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} - 1\\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}\end{aligned}$$

Sei $z \in \mathbb{C}$, so dass $0 < |z| < \delta$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \left|\frac{e^z - 1}{z} - 1\right| &= \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}\right|\\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!}\\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} |z|^{n-1}\\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \delta^{n-1}\\ &= \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots\\ &= \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon \qquad \square\end{aligned}$$

Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Zum Beispiel $f_n(x) = x^n$. In diesem Beispiel gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ für } 0 \leq x < 1$$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$$

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Limesfunktion, d.h:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Definition: Sei $I = [a,b]$. Seien $f_n : I \to \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$

(i) Wir sagen, f_n *konvergiert gegen* f, wenn $f_n(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert, für jedes $x \in [a,b]$, d.h.
$\forall\, x \in [a,b] \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

(ii) Wir sagen, f_n konvergiert *gleichmässig* gegen f, wenn gilt:
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in [a,b]$
$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Satz 24: Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen die *gleichmässig* gegen f konvergiert.
$\Rightarrow f$ ist stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in [a,b]$, sei $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass} \\
& |f_{n_0}(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\, x \in [a,b] \\
\Rightarrow\quad & \exists\, \delta > 0 \qquad \forall\, x \in [a,b] \\
& |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \\
\Rightarrow\quad & \text{Falls } |x - x_0| < \delta \text{ so gilt } |f(x) - f(x_0)| \\
& \le \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} \\
& = \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

5. Zusammenfassung

1 Seien x_n, $y_n \in \mathbb{R}$ konvergente Folgen und sei $x_i = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y_i = \lim_{n\to\infty} y_n$. Dann gilt, die Folgen $x_n + y_n$, x_n, y_n konvergieren und

$$\begin{aligned}
x + y &= \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) \\
x \cdot y &= \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n
\end{aligned}$$

Ausserdem gilt, falls $x \neq 0$ dann konvergiert die Folge $\frac{1}{x_n}$ und

$$\frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n}$$

2 Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei $\mathbb{N} \to X : n \to x_n$ eine Folge in X und $n \in X$ Wir sagen x_n *konvergiert gegen* x wenn gilt $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$n \ge n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

3 Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume und $f : X \mapsto Y$ eine Abbildung. Sei $x_0 \in X$ dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) f ist stetig an der Stelle x_0
(ii) Wenn $x_n \in X$ eine Folge ist, die gegen x_0 konvergiert, dann konvergiert die Folge $f(x_n) \in Y$ gegen $f(x_0)$

4 Eine Folge $x_n \in \mathbb{R}$ heisst monoton wachsend (bzw.) fallend, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n \ge x_{n-1}$ (bzw.) $x_n \le x_{n-1}$
x_n heisst beschränkt, wenn es eine Zahl $x > 0$ gibt, so dass $|x_n| \le C$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

5 $X \subset \mathbb{R}$ heisst nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x \le b \quad \forall\, x \in X$

6 Eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ heisst obere Schranke von X, falls $x \le b \quad \forall\, x \in X$. Eine Zahl $b_0 \in \mathbb{R}$ heisst Supremum von X, oder kleinste obere Schranke von X falls.
(i) b_0 ist eine obere Schranke von X
(ii) Falls $b \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von X ist, so gilt $b_0 \le b$

7 Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

8 Es gibt, wenn überhaupt, genau ein Supremum, das wir mit $b_0 := \sup X = \sup_{x\in X} x$ bezeichnen.

9 Sei X eine Menge. Sei $\mathbb{N} \to X : n \mapsto x_n$ eine Folge von X. Eine *Teilfolge* von x_n ist eine Folge der Form $\mathbb{N} \to X : k \mapsto y_k = x_{n_k}$, wobei $n_k \in \mathbb{N}$ eine Folge natürlicher Zahlen ist, so dass $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ (d.h. $n_k < n_{k+1}\ \forall\, k \in \mathbb{N}$).

10 Der Satz von Bolzano-Weierstrass lautet: Jede beschränkte Folge reeler Zahlen hat eine kovergente Teilfolge.

11 Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es Punkte $x_0, y_0 \in [a, b]$, so dass

$$f(x_0) \quad \leq \quad f(x) \leq f(y_0) \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

12 Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Die *Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty}$ heisst *konvergent*, wenn die Folge der *Partialsummen* $S_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert. In diesem Fall bezeichnen wir den Limes mit

$$\text{Limes } = \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

13 Sei $c_k \geq 0$ eine monoton fallende Folge, die gegen 0 konvergiert. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k$.

14 Sei $a_k \in \mathbb{R}, \qquad k = 1, 2, \ldots$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst absolut konvergent wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

15 Sei $a_k \in \mathbb{R}$ eine Folge, so dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Ausserdem hängt der Limes $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht ab von der Reihenfolge der a_k

16 Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=1}^{\infty} b_l$ absolut konvergent. Dann gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{\infty} b_l\right) = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_k \cdot b_l \quad \text{(macht nur Sinn, wenn die Reihe absolut konvergent)}$$

17 Sei $a_k \in \mathbb{C}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$ und $C > 0$ und $0 < q < 1$, so dass

$$|a_k| \quad \leq \quad Cq^k \qquad \forall\, k \geq 0$$

$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut.

18 Sei $c_k > 0$ eine monoton fallende Folge. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{l=0}^{\infty} 2^l \cdot c_{2^l} \text{ konvergiert}$$

19 Sei $a_k \in \mathbb{C}$ und $C > 0$, $\delta > 0$ so dass

$$|a_k| \leq C \cdot \frac{1}{k^{1+\delta}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

20 Die Reihe $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, $s > 1$ heisst Riemann'sche Zeta-Funktion und $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{2}$ nach Euler.

21 Sei $0 \neq a_k \in \mathbb{C}$ eine Folge so dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \rho \qquad \forall\, k \geq k_0$$

wobei $\rho \in \mathbb{R}$, $0 < \rho < 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

22 Die Reihe $\exp(x) := e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ heisst Exponentialfunktion.

23 Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

wobei $a_k \in \mathbb{C}$

24 (i) Es gibt genau eine Zahl ρ, so dass $0 \leq \rho \leq \infty$ und die Potenzreihe absolut konvergiert für $|z| < \delta$ und divergiert für $|z| > \delta$

(ii) Die Zahl ρ ist gegeben durch

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geq N} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(iii) Falls die Folge $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ konvergiert, so ist

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Die Zahl ρ heisst Konvergenzradius der Potenzreihe.

25 $\exp(z+n) = \exp(z) + \exp(n)\ \forall\, z, n \in \mathbb{C}$

26 Die Exponentialfunktion ist stetig

27 (i) $e^t > 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$

(ii) $s < t \Rightarrow e^s < e^t \qquad \forall\, s, t \in \mathbb{R}$

(iii) $\lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t!} = 0$

(iv) $\lim_{t\to\infty} t^{-p} e^t = \infty \qquad \forall\, p \in \mathbb{N}$

28 $\exp \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv.

29 Die Umkehrfunktion von $\exp \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bezeichnen wir mit $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

30 (i) $e^{\log(x)} = x \quad \forall\, x > 0$

(ii) $\log(e^t) = t \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

31 $\forall\, x, y > 0$ ist $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

32 $a > 0, \forall\, q \in \mathbb{Q} \Rightarrow \log(a^{p/q}) = \frac{p}{q} \log(a)$

33 $q > 0, \forall\, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{p/q} = e^{p/q \log(a)}$

34 Die Funktion $\log(0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

35 Sei $0 < t < 2\pi$. Dann gilt

(i) $\left|e^{it}\right| = 1$

(ii) Die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis von 1 bis e^{it} ist gleich t

36 $\lim_{n\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$

37 Wir sagen, f_n konvergiert gegen f, wenn $f_n(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert, für jedes $x \in [a, b]$, d.h. $\forall\, x \in [a, b] \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

38 Wir sagen, f_n konvergiert gleichmässig gegen f, wenn gilt: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in [a, b]$

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

39 Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen die gleichmässig gegen f konvergiert, dann ist f stetig.

KAPITEL 5

Differentialrechnung

[V17-070102]

1. Die Ableitung

FRAGE: Wie definieren wir die Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0? "*Ableitung an der Stelle* x_0".

ANTWORT: durch „Näherung".

Definition: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ gegeben und $x_0 \in (a,b)$. Die Funktion f heisst *differenzierbar an der Stelle* x_0, wenn es eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ gibt, so dass folgendes gilt: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \left| \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - A \right| < \varepsilon$$

BEMERKUNG: Wenn f differenzierbar ist an der Stelle x_0, so ist die obige Zahl A eindeutig bestimmt. Diese Zahl A nennen wir die *Ableitung von f an der Stelle* x_0

BEZEICHNUNG:

$$\begin{aligned} f'(x) &:= \tfrac{df}{dx}(x_0) \\ &:= \lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{aligned}$$

(falls der Limes existiert)

Ableitung: $f'(x) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (32)

Beispiel 5.1: $f(x) = 3$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$\Rightarrow f$ ist differenzierbar und $f'(x_0) = 0$

Beispiel 5.2: $f(x) = x$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

$\Rightarrow f'(x_0) = 1$

Beispiel 5.3: $f(x) = x^2$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$$

$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} = 2 \cdot x_0$

Beispiel 5.4: $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{e^x - 1}{x}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$$|x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow f'(0) = 1$. x_0 beliebig

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} \\ &= \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \cdot e^{x_0} \\ \Rightarrow f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \cdot e^{x_0} \\ &= e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\xi\to 0} \frac{e^{\xi} - 1}{\xi}}_{1} \\ &= e^{x_0} = f(x_0) \\ f' &= f \end{aligned}$$

Beispiel 5.5: $f(x) = |x|$ f ist differenzierbar an der Stelle x_0, falls $x_0 \neq 0$

$$f'(x_0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_0 > 0 \\ -1, & \text{falls } x_0 < 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$:

$$\Rightarrow \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \tfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

f ist nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$

Beispiel 5.6: $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. f ist unstetig an der Stelle $x_0 = 0 \Rightarrow f$ ist nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$

Lemma 18: Falls f differenzierbar ist an der Stelle x_0, so ist f auch stetig an der Stelle x_0.

Beweis: Sei

$$m(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & \text{falls } x \neq x_0 \\ f'(x_0), & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

(i) m ist stetig an der Stelle x_0

(ii) $f(x) - f(x_0) = m(x) \cdot (x - x_0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + m(x) \cdot (x - x_0)$ ist stetig an der Stelle x_0 $\quad\square$

Übung: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar an der Stelle x_0 genau dann, wenn es eine Funktion $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass m stetig ist an der Stelle x_0 und $f(x) - f(x_0) = m(x) \cdot (x - x_0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt $f'(x_0) = m(x_0)$.

Satz 25: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in I$. Dann gilt:

(i) $f+g$ ist differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$(f+g)'\cdot(x_0) \quad = \quad f'(x_0)+g'(x_0)$$

(ii) $f\cdot g$ ist differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$(fg)'(x_0) \quad = \quad f'(x_0)g(x_0)+f(x)g'(x_0) \qquad \textit{Leibnitz Regel}$$

(iii) Falls $g(x)\neq 0 \quad \forall\, x\in I$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x)-f(x)g'(x_0)}{g(x)^2}$$

Beweis: (1) Übung (einfach) *(Siehe Anhang 3 auf Seite 191*

(2) Es gibt Funktionen m_f, $m_g : I\to\mathbb{R}$ die stetig sind an der Stelle x_0 und so dass

$$\left.\begin{array}{rcl} f(x)-f(x_0) & = & m_f(x)\cdot(x-x_0) \\ g(x)-g(x_0) & = & m_g(x)\cdot(x-x_0) \end{array}\right. \forall\, x\in I$$

$$\begin{aligned} &= (f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0)) \\ &= m_f(x)g(x)(x-x_0)-f(x_0)m_g(x)(x-x_0) \\ &= m(x)(x-x_0) \end{aligned}$$

wobei $m(x) := m_f(x)g(x)+f(x_0)m_g(x)$. Diese Funktion m ist stetig an der Stelle x_0. $\Rightarrow$ $f\cdot g$ ist differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$\begin{aligned} (fg)'(x_0) &= m(x_0) \\ &= m_f(x_0)g(x_0)+f(x_0)m_g(x_0) \\ &= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

(3) $g\neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{g(x)g(x_0)} \\ &= m(x)\cdot(x-x_0) \quad \text{wobei} \\ m(x) &:= \frac{m_f(x)g(x_0)-f(x_0)m_g(x)}{g(x)g(x_0)} \end{aligned}$$

Diese Funktion ist stetig an der Stelle x_0. $\Rightarrow$ $\frac{f}{g}$ ist differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)=m(x_0)=\frac{m_f(x)g(x_0)-f(x_0)m_g(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \square$$

Bemerkung: $g(x)\equiv\lambda$, f differenzierbar an der Stelle x_0, $\Rightarrow$ $\lambda\cdot f$ ist differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$(\lambda f)'(x_0) \quad = \quad \lambda\cdot f'(x_0)$$

Satz 26 (Kettenregel): . Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle x_0, Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $y_0 := f(x_0)$. $\Rightarrow g \circ f$ ist differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$(g \circ f)' \quad = \quad g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Beweis: $\exists\, m_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle x_0, $\exists\, m_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle y_0 so dass

(1) $f(x) - f(x_0) = m_f(x) \cdot (x - x_0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
(2) $g(y) - g(y_0) = m_g(x) \cdot (y - y_0) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g(f(x)) - g(f(x_0)) &\overset{(2)}{=} m_g(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0)) \\
&\overset{(1)}{=} \underbrace{m_g(f(x)) \cdot m_f(x)}_{=:m(x)}(x - x_0) \\
&\Rightarrow m \text{ ist stetig an der Stelle } x_0 \\
&\Rightarrow g \circ f \text{ ist differenzierbar an der Stelle } x_0 \text{ und} \\
(g \circ f)'(x_0) = m(x_0) &= m_g(\overbrace{f(x_0)}^{y_0}) \cdot m_f(x_0) \\
&= g'(y_0) \cdot f'(x_0) \quad \square
\end{aligned}$$

Beispiel 5.7: $g(y) = \log y$, $y > 0$. Angenommen wir wissen dass diese Funktion differenzierbar ist. Sei $f(x) := e^x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{llll}
 & f : \mathbb{R} \to (a, \infty) \quad g = f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R} & & \\
 & g \circ f = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} & & \\
\Rightarrow & \qquad 1 & = & (g \circ f)'(x) \\
 & & = & g'(f(x))f'(x) \\
 & & \overset{Bsp5.4}{=} & g'(e^x) \cdot e^x \\
\Rightarrow & g'(y) \cdot y & = & 1 \quad \forall\, y > 0 \\
\Rightarrow & \quad g'(y) & = & \frac{1}{y} \quad \forall\, y > 0 \quad \square
\end{array}$$

Beispiel 5.8: $f(x) = x^n$

BEHAUPTUNG: $f'(x) = nx^{n-1}$

Beweis: Induktion $n = 1$. Siehe Beispiel 5.2 Angenommen dies gilt für eine ganze Zahl $n \geq 1$. $f(x) := x^n$. Nach Induktionsannahme f ist differenzierbar und $f(x) = nx^{n-1}$

$$\begin{array}{llll}
\overset{S25}{\Rightarrow} & g \text{ ist differenzierbar und} & & \\
 & g'(x) & = & f(x) + xf'(x) \\
 & & = & x^n + x \cdot nx^{n-1} \\
 & & = & (n+1)x^n \\
\Rightarrow & \text{Behauptung gilt für } n+1 \text{ statt } n & &
\end{array}$$

Beispiel 5.9: $f(x) = x^{-n}$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & f(x) & = & \frac{1}{x^n} \\ \overset{S25}{\Rightarrow} & f(x) & = & \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n \cdot x^{n-1}}{(x^n)^2} \\ & & = & -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} \end{array}$$

Beispiel 5.10: $a \in \mathbb{R}$. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := x^a = e^{a \log x}$$

Behauptung: f ist differenzierbar und

$$f'(x) = ax^{a-1}$$

Beweis: $f = g \circ h$

$$\begin{array}{rcll} h(x) & := & \log x & h'(x) = \frac{1}{x} \\ g(y) & := & e^{ay} & g'(y) = ae^{ay} \end{array}$$

$\overset{S26}{\Rightarrow}$ f ist differenzierbar und

$$\begin{aligned} f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) &= a \cdot e^{a \log x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= a \cdot e^{a \log x} \frac{1}{e^{\log x}} \\ &= a \cdot e^{a \log x} e^{-\log x} \\ &= a \cdot e^{(a-1) \log x} \\ &= a \cdot x^{a-1} \end{aligned}$$

[V18-100102] Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x : I \to \mathbb{R}^n$

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

$x_j : I \to \mathbb{R}$ $j$te Koordinate $t_0 \in I$.

Definition: Die vektorwertige Abbildung $x : I \to \mathbb{R}^n$ heisst *differenzierbar an der Stelle* t_0, wenn der Limes: $\lim_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ existiert, d.h. $\exists\, v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, t \in I$

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \underbrace{\left\| \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} - v \right\|}_{\textit{Euklidische Norm}} < \varepsilon$$

Bemerkung: x ist differenzierbar an der Stelle t_0 $\Leftrightarrow$ Jede der Funktionen $x_1, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar an der Stelle t_0

Beispiel 5.11: $z : I \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, z differenzierbar an der Stelle t_0 $\Leftrightarrow$ $\Re z$, $\Im z : I \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar. $z(t) = e^t = \cos(t) + i \sin(t)$

Behauptung:

$$\begin{array}{rcr} \sin'(t) & = & \cos(t) \\ \cos'(t) & = & -\sin(t) \end{array}$$

Beweis: Das Lemma 17:

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

d.h. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$

$$0 < |z| < \delta \Rightarrow \left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| < \varepsilon$$

$z = ih$, $|z| = |h|$

$$\begin{aligned} 0 < h < \delta \Rightarrow & \left| \frac{e^{ih} - 1}{ih} - 1 \right| < \varepsilon \\ = & \left| \frac{e^{ih} - 1}{h} - i \right| \left| e^{it} \right| < \varepsilon \\ = & \left| \frac{e^{i(h+t)} - e^{it}}{h} - ie^{it} \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$:

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{e^{i(t+h)} - e^{it}}{h} - ie^{it} \right| < \varepsilon$$

d.h.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{i(t+h)} - e^{it}}{h} = ie^{it}$$

d.h. die Funktion $z(t) = e^{iz}$ ist differenzierbar und

$$\begin{aligned} z'(t) &= ie^{it} \\ &= i(\cos(t) + i\sin(t)) \\ &= -\sin(t) + i\cos(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung

2. Extrema

Sei $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt nach Satz 13 auf Seite 42: $\exists\, \xi \in [a, b]$ so dass

$$f(x) \leq f(\xi) \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

Ein solcher Punkt ξ heisst *globales Maximum* von f

Globales Maximum: $\xi \in [a, b]$ so dass $f(x) \leq f(\xi) \quad \forall\, x \in [a, b]$ (33)

Definition: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Sei $\xi \in (a, b)$. ξ heisst *lokales Maximum* von f, wenn es eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass:

$$|\xi - x| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(\xi)$$

ξ heisst *lokales Minimum*, wenn $\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$

$$|\xi - x| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(\xi)$$

ξ heisst *lokales Extremum*, wenn ξ entweder ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum ist.

Lemma 19: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\xi \in (a, b)$ ein lokales Extremum. Sei f differenzierbar an der Stelle ξ.

$$\Rightarrow f'(\xi) = 0$$

Beweis: Sei $m(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}, & x \neq \xi \\ f'(\xi), & x = \xi \end{cases}$. $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$$f(x) \quad = \quad f(\xi) + m(x)(x-\xi) \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

Fall 1: $f'(\xi) = m(\xi) > 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (\xi + \delta) : m(x) > 0 \\ &\Rightarrow \quad f(x) > f(\xi) \text{ für } x \in (\xi, \xi+\delta) \\ & \quad f(x) < f(\xi) \text{ für } x \in (\xi-\delta, \xi) \\ &\Rightarrow \quad \xi \text{ ist kein lokales Extremum} \end{aligned}$$

Fall 2: $f'(\xi) = m(\xi) < 0$. Genauso: $\exists\ \delta > 0$:

$$\begin{aligned} &\xi < x < \xi + \delta \quad \Rightarrow f(x) < f(\xi) \\ &\xi - \delta < x < \xi \quad \Rightarrow f(x) > f(\xi) \\ &\Rightarrow \xi \text{ ist kein lokales Extremum} \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt. Wenn $f'(\xi) \neq 0$, so ist ξ kein lokales Extremum von f, also gilt: ξ lokales Extrema $\Rightarrow f'(\xi) = 0$

Beispiel 5.12: Seien $a > 0$ und p,$q > 1$, so dass

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Sei $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}x^q - ax \\ f(0) &= \frac{1}{p}a^p > 0 \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \infty \end{aligned}$$

Wo ist das Minimum? $f'(\xi) = \xi^{q-1} - a = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \xi = a^{\frac{1}{q-1}} \\ &\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \\ &q = \frac{p}{p-1}, \quad q - 1 = \frac{1}{p-1} \\ &\Rightarrow \xi = a^{p-1} \\ f(\xi) &= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{(p-1)q} - a \cdot a^{p-1} \\ &= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^q - a^p \\ &= \frac{1}{q}a^q - a^p\left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \geq 0$$

$$\Rightarrow ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad \forall\, a,b \geq 0^*$$

Satz 27 (Satz von Rolle): Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar an jedem Punkt im Inneren des Intervalls. Sei $f(a) = f(b)$, $\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ so dass $f'(\xi) = 0$

Beweis: **1. Fall:** $f \equiv$ konstant. $\Rightarrow f'(\xi) = 0 \quad \forall\, \xi \in (a,b)$

2. Fall: $\exists\, x \in (a,b)$, so dass $f(x) > f(a)$. Wähle $\xi \in [a,b]$, so dass $f(x) \leq f(\xi) \quad \forall\, x \in [a,b]$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow && f(\xi) > f(a) = f(b) \\ &\Rightarrow && \xi \neq a, b \\ &\Rightarrow && \xi \text{ ist ein lokales Maximum} \\ &\overset{L19}{\Rightarrow} && f'(\xi) = 0 \end{aligned}$$

3. Fall: $\exists\, x \in (a,b)$ so dass $f(x) < f(a)$. Wähle $\xi \in [a,b] : f(\xi) \leq f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow && f(\xi) < f(a) = f(b) \\ &\Rightarrow && \xi \neq a, b \\ &\overset{L19}{\Rightarrow} && f'(\xi) = 0 \quad \square \end{aligned}$$

3. Mittelwertsatz

Satz 28 (Mittelwertsatz): Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Intervall von $[a,b]$ differenzierbar. $\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis: Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

g ist stetig in $[a,b]$. g ist differenzierbar in $[a,b]$

$g(a) = g(b) = f(a)$, $\overset{Rolle}{\Rightarrow} \exists\, \xi \in (a,b)$ so dass $g'(\xi) = 0$. Nun gilt:

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \square$$

Korollar 7: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $|f'(\xi)| \leq c \quad \forall\, \xi \in [a,b]$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_0)| \leq c\,|x_1 - x_0| \quad \forall\, x_0, x_1 \in [a,b]$$

Beweis: Sei $x_0 < x_1 \overset{MWS}{\Rightarrow} \exists\, \xi \in (x_0, x_1)$ so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right| = |f'(\xi)| \leq c$$

$$\Rightarrow \text{Behauptung } \square$$

Korollar 8: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ an jeder Stelle differenzierbar. Dann gilt

$$f \text{ konstant} \quad \Leftrightarrow \quad f'(\xi) = 0 \quad \forall\, \xi \in [a,b]$$

*was schon im Lemma 2 auf Seite 10 gezeigt wurde

Beweis: $\Rightarrow$**:** folgt aus Definition
$\Leftarrow$**:** Korollar 7 mit $c = 0$ $\square$

[V19-140102]

Korollar 9: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

(i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$ f ist monoton wachsend
(ii) $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$ f ist strikt monoton wachsend

Beispiel 5.13: Sei $f(x) = x^3$. $f'(0) = 0$, also ist f zumindest monoton wachsend. Es lässt sich zeigen, dass f auch strikt monoton wachsend ist.

Beweis (Korollar 9): Seien $a \leq x_0 < x_1 \leq b$. $\overset{MWS}{\Rightarrow} \exists\, \xi \in (x_0, x_1)$ so dass

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ f'(\xi) \geq 0 &\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_0) \\ f'(\xi) > 0 &\Rightarrow f(x_1) > f(x_0) \end{aligned}$$

Umkehrung in (i): f monoton wachsend

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differentierbar, $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar

$$\begin{aligned} f''(x) &:= \text{Ableitung von } f' \text{ an der Stelle x} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x + h) - f'(x)}{h} \end{aligned}$$

2mal differenzierbar

Korollar 10: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ 2mal differenzierbar. Wenn $f''(x) > 0$ $\forall\, x \in I$ dann ist f , das heisst $\forall\, a, b \in I$, $a < b$, $\forall\, t \in (0, 1)$

$$f\big(ta + (1 - t)b\big) < tf(a) + (1 - t)f(b)$$

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz $\exists\, \xi \in \big(a, ta + (1 - t)b\big)$ $\quad \exists\, \eta \in \big(ta + (1 - t)b, b\big)$ so dass

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \frac{f\big(ta + (1 - t)b\big) - f(a)}{ta + (1 - t)b - a} \\ f'(\eta) &= \frac{f(b) - f\big(ta + (1 - t)b\big)}{b - ta - (1 - t)b} \end{aligned}$$

Nach Korollar 9 ist f' strikt monoton wachsend.

$$\Rightarrow f'(\xi) < f'(\eta)$$
$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{f\big(ta + (1 - t)b\big) - f(a)}{(1 - t)(b - a)} < f'(\eta) = \frac{f(b) - f\big(ta + (1 - t)b\big)}{t(b - a)}$$
$$\Rightarrow t\Big(f\big(ta + (1 - t)b\big) - f(a)\Big) < (1 - t)\Big(f(b) - f\big(ta + (1 - t)b\big)$$
$$\Rightarrow f\big(ta + (1 - t)b\big) < tf(a) + (1 - t)f(b) \quad \square$$

BEMERKUNG: $f'' \geq 0 \in I$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ f' \text{ monoton wachsend}\\
&\Leftrightarrow\ f \text{ ist konvex } \forall\, a, b \in I \text{ mit } a < b \text{ und } \forall\, t \in [0,1] \text{ gilt}\\
&\ f\big(ta + (1-t)b\big) \leq tf(a) + (1-t)f(b)
\end{aligned}$$

Korollar 11: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 2mal stetig differenzierbar[†] $a < \xi < b$, $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) > 0$. $\Rightarrow$

(i) ξ ist ein lokales Minimum von f

(ii) Falls $f''(x) > 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$ dann ist ξ ein globales Minimum von f.

Beweis (von (i)): Nach Voraussetzung ist f'' stetig und $f''(\xi) > 0$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & \exists\, \delta > 0 \text{ so dass } f''(x) > 0 \quad \forall\, x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]\\
\Rightarrow\ & f' \text{ ist strikt monoton wachsend im Intervall } [\xi - \delta, \xi + \delta]\\
& f'(\xi) = 0\\
\Rightarrow\ & f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (\xi, \xi + \delta]\\
& f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in [\xi - \delta, \xi)\\
\Rightarrow\ & f \text{ ist strikt monoton fallend in } [\xi - \delta, \xi)\\
& f \text{ ist strikt monoton wachsend in } (\xi, \xi + \delta]\\
\Rightarrow\ & f(\xi) < f(x) \quad \forall\, x \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \text{ so dass } x \neq \xi
\end{aligned}$$

Damit ist (i) bewiesen.

Beweis (von (ii)): Genauso mit a statt $\xi - \delta$ und b statt $\xi + \delta$

Beispiel 5.14: $\alpha \in \mathbb{R}$, $I := [-1, \infty]$. $f : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned}
& f(t) &:=&\ (1+t)^\alpha - 1 - \alpha t \qquad t > -1\\
\Rightarrow\ & f'(t) &=&\ \alpha(1+t)^{\alpha-1} - \alpha\\
\Rightarrow\ & f'(0) &=&\ 0,\ f(0) = 0
\end{aligned}$$

Nun ist

$$f'(t) \quad = \quad \alpha(\alpha - 1)\underbrace{(1+t)^{\alpha-2}}_{>0} \qquad t > -1$$

1. Fall: $0 < \alpha < 1$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & f''(t) < 0 \quad \forall\, t \in I\\
\overset{K11}{\Rightarrow}\ & \xi = 0 \text{ ist ein globales Maximum}\\
\Rightarrow\ & f(t) \leq 0 \quad \forall\, t \neq 0\\
\Rightarrow\ & (1+t)^\alpha < 1 + \alpha t \quad \forall\, t > -1, t \neq 0\\
& (\text{falls } 0 < \alpha < 1)
\end{aligned}$$

2. Fall: $\alpha < 0$ oder $\alpha > 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & f''(t) > 0 \quad \forall\, t \in I\\
\overset{K11}{\Rightarrow}\ & \xi = 0 \text{ ist ein globales Minimum}\\
\Rightarrow\ & f(t) > 0 \quad \forall\, t \in I \backslash \{0\}\\
\Rightarrow\ & (1+t)^\alpha > 1 + \alpha t \quad \forall\, t > -1, t \neq 0\\
& (\text{falls } \alpha < 0 \text{ oder } \alpha > 1)
\end{aligned}$$

[†]Funktion differenzierbar, Ableitung differenzierbar & stetig

4. Regel von l'Hospital

Korollar 12: Seien $f,\ g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass:

$$\lim_{t\to b} f(t) = 0 = \lim_{t\to b} g(t)$$

und $g(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in (a,b)$

$$\Rightarrow \lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to b} \frac{f'(t)}{g'(t)} \text{ (falls der zweite Limes existiert)}$$

Regel von l'Hospital $\Rightarrow \lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to b} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ (34)

Beweis: Wir können annehmen, dass $f,\ g$ auf $(a,b]$ definiert sind und $f(b) = g(b) = 0$. Sei $A = \lim_{t\to b} \frac{f'(t)}{g'(t)}$. $\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, t$

$$b - \delta < t < b \Rightarrow \left| A - \frac{f'(g)}{g'(t)} \right| < \varepsilon$$

BEHAUPTUNG: Bei dieser Wahl von δ gilt:

$$b - \delta < t < b \Rightarrow \left| A - \frac{f(g)}{g(t)} \right| < \varepsilon$$

Beweis: Sei $h : [t,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(s) = f(t)g(s) - g(t)f(s)$$

h ist differenzierbar im Intervall (t,b). Dann gilt: $h(t) = 0$ und $h(b) = 0$

$$\begin{array}{lrcl}
\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} & \exists\, \tau \in (t,b) \text{ so dass} & & \\
 & h'(\tau) & = & 0 \\
 & 0 = h'(\tau) & = & f(t)g'(\tau) - g(t)f'(\tau) \\
\Rightarrow & \frac{f(t)}{g(t)} & = & \frac{f'(\tau)}{g'(\tau)} \\
\text{Nun gilt:} & & & \\
 & b - \delta & < & \tau < b \\
\Rightarrow & \left| A - \frac{f'(\tau)}{g'(\tau)} \right| & < & \varepsilon \\
\Rightarrow & \left| A - \frac{f(t)}{g(t)} \right| & < & \varepsilon
\end{array}$$

BEMERKUNG: Korollar 12 gilt auch im Fall $b = \infty$

Beispiel 5.15:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$$\begin{array}{rclrcl}
f(x) & = & \sin(x) & f'(x) & = & \cos(x) \\
g(x) & = & x & g'(x) & = & 1
\end{array}$$

Beispiel 5.16:

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \frac{4t^2 + 3t - 7}{5t^3 - 7t + 2} = \lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \frac{8t + 3}{15t^2 - 7}$$
$$= \frac{1}{8}$$

Beispiel 5.17:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh'(x) = \sinh'(x) \qquad \sinh'(x) = \cosh'(x)$$
$$-\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = 1$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \log\big(\cosh(\alpha t)\big) \\ g(t) &= \log\big(\cosh(\beta t)\big) \\ \lim_{t\to 0} f(t) &= \lim_{t\to 0} g(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\log\big(\cosh(x)\big) &= \frac{1}{\cosh(x)} \cdot \cosh'(x) \\ &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ &= \tanh(x) \\ \frac{d}{dx}\tanh(x) &= \frac{\sinh'(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= 1 - \tanh^2(x) \\ \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)} &= \lim_{t\to 0}\frac{\alpha\tanh(\alpha t)}{\beta\tanh(\beta t)} \\ &= \lim \frac{\alpha^2\big(1-\tanh^2(\alpha t)\big)}{\beta^2\big(1-\tanh^2(\beta t)\big)} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \end{aligned}$$

[V20-170102] Um den Wert an der Stelle x nahe bei x_0 approximativ zu bestimmen, betrachten wir die Tangente

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Beispiel 5.18: $\sqrt[5]{1025}$, $\quad f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$, $\quad x_0 = 1024$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 4 \\ f'(x) &= \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{x^{\frac{1}{5}}}{5x} \\ f'(x_0) &= \frac{4}{5\cdot 1024} = 0.00078125 \end{aligned}$$

$x = 1025$, $x - x_0 = 1$

$$\begin{aligned} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) &= 4.00078125 \\ \text{Exaktes Resultat:} &\quad 4.00078095 \\ \text{Fehler:} &\quad 0.00000030 \end{aligned}$$

Wie finden wir eine bessere Näherung?

5. Taylorsche Formeln

$$f^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k \mathrm{f}}{\mathrm{dx}^k} \quad k\text{-te Ableitung der Funktion } f : I \to \mathbb{R} \text{ (falls sie existiert)}$$

$$\begin{aligned} f^{(k)} &= \frac{d^k \mathrm{f}}{\mathrm{dx}^k} \\ f^{(1)} &= \frac{df}{dx} = f' \\ f^{(2)} &= \frac{df^{(1)}}{dx} \\ f^{(3)} &= \frac{df^{(2)}}{dx} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ f^{(k)} &= \frac{df^{(k-1)}}{dx} \end{aligned}$$

Gegeben sei eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist und eine Punkt $x_0 \in I$ sei n-mal differenzierbar. Gesucht ist ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$ so, dass er die Funktion möglichst gut annähert, also:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= f(x_0) \\ p'(x_0) &= f'(x_0) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ p^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Es existieren n Gleichungen und es gilt:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= a_0 \\ p'(x_0) &= a_1 \\ p''(x_0) &= 2 \cdot a_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ p^{(k)}(x_0) &= k! a_k{}^{\ddagger} \end{aligned}$$

Wir wählen

$$a_k := \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Definition: Das Polynom:

$$\mathrm{J}_{x_0}^n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

heisst *Taylorpolynom* der Ordnung n von f an der Stelle x_0.

Wie gross ist der Fehler bei Taylorannäherung?

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - \mathrm{J}_{x_0}^n(x) \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) \end{aligned}$$

‡ $k!$, da immer abgeleitet wird, z.B. $(x^6)^V = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x$

Satz 29: Sei f $(n+1)$-mal differenzierbar. $x > x_0 \in I$. $\Rightarrow \exists\, \xi \in (x_0, x)$, so dass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Lemma 20: Sei $g : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar und $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$. $\Rightarrow$ für jedes $x \in I$ mit $x > x_0$ $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ so dass

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

Beweis: Induktion: $n = 0$, $g(x_0) = 0$. $\Rightarrow \exists\, \xi \in (x_0, x)$ so dass:

$$\frac{g(x)}{x-x_0} = g'(\xi)$$

nach dem Mittelwertsatz *(Seite 68)* gilt.

Annahme: Das Lemma 20 sei bewiesen für $n-1$ statt n.

Zu zeigen: Lemma 20 gilt für n. Sei $h : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} h(t) &= g(x)(t-x_0)^{n+1} - (x-x_0)^{n+1}g(t) \\ \Rightarrow h(x_0) &= g(x)(x_0-x_0)^{n+1} - (x-x_0)^{n+1}g(x_0) = 0 \\ h(x) &= g(x)(x-x_0)^{n+1} - (x-x_0)^{n+1}g(x) = 0 \\ \Rightarrow h(x) &= h(x_0) \end{aligned}$$

Satz von Rolle *(Seite 68)*: $\exists$ ein Punkt $t \in (x_0, x)$ so dass $h'(t) = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 = h'(t) = (n+1)g(x)(t-x_0)^n - (x-x_0)^{n+1} \cdot g'(t) \\ &\Rightarrow \frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \stackrel{(\heartsuit)}{=} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{g'(t)}{(t-x_0)^n} \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$, das heisst, g' erfüllt die Voraussetzung von Lemma 20 mit $n-1$ statt n[§]

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists\, \xi \in (x_0, t) \text{ so dass} \\ &\quad \frac{g'(t)}{(t-x_0)^n} = \frac{g'^n(\xi)}{n!} \\ &\stackrel{\heartsuit}{\Rightarrow} \frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 20 $\Rightarrow$ Satz 29: Sei $g(x) := R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. g ist $n+1$ mal differenzierbar. Ausserdem gilt:

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{für } k = 0, \ldots, n$$

[§] g' ist n-mal differenzierbar und $t > x_0$

$\Rightarrow g$ erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 20 $\overset{L20}{\Rightarrow} \exists\, \xi \in (x_0, x)$ so dass

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \\ &\overset{\P}{=} \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \\ g(x) &= \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 13: $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall $f : I \to \mathbb{R}$ $n+1$-mal differenzierbar. Sei $c > 0$ so dass

$$\left|f^{n+1}(\xi)\right| < c \quad \forall\, \xi \in I$$

$\Rightarrow \forall\, x, x_0 \in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0) \right| \le \frac{c}{(n+1)} |x-x_0|^{n+1} \;\|$$

Sei f unendlich oft differenzierbar. Die Potenzreihe:

$$\mathrm{J}_{x_0}^{\infty} f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

heisst Taylorreihe von f an der Stelle x_0.

FRAGE: Ist $\mathrm{J}_x^{\infty} f(x) = f(x)$? Für welche x konvergiert die Taylorreihe?

Beispiel 5.19:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \\ f^{(k)}(0) &= k! a_k \qquad k = 0, \ldots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_0^{\infty} f(t) = \mathrm{J}_0^{n} f(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = f(t) \\ \mathrm{J}_0^{\infty} f &= f \end{aligned}$$

Ausserdem

$$\mathrm{J}_a^{\infty} = f \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

Beispiel 5.20: $f(t) = \frac{1}{1-t}$, $t < 1$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(t) &= \frac{k!}{(1-t)^{k+1}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ f^{(k)}(0) &= k! \\ \Rightarrow \mathrm{J}_0^{\infty} f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \end{aligned}$$

¶ $g^{(n+1)} = f^{(n+1)} - 0$, da die $n+1$-te Ableitung des Taylorpolynoms vom Grad n 0 wird

‖ Obere Schranke für den Fehler der Taylorreihe konvergiert für $|t| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}, \qquad -1 < t < 1$$

Beispiel 5.21: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch die Formel:

$$f(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

BEHAUPTUNG: f ist unendlich oft differenzierbar, insbesondere gilt: $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall\, k = 0, 1, 2, \ldots,$ das heisst $\mathrm{J}_0^\infty = 0$ aber $f \neq 0$

Beweis (Skizze):

$$f'(t) = \frac{2}{t^3} \cdot e^{-\frac{1}{t^2}}$$

$$f''(t) = (-\frac{6}{t^4} + \frac{4}{t^6}) \cdot e^{-\frac{1}{t^2}}$$

$$f'''(t) = (\frac{24}{t^5} + \cdots) \cdot e^{-\frac{1}{t^2}}$$

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{1}{t^n} e^{-\frac{1}{t^2}} = ? \qquad\qquad y = \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{y \to \infty} \frac{e^{-y}}{y^{-\frac{n}{2}}} = \lim_{y \to \infty} \left(y^{\frac{n}{2}} e^{-y} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0^+} f^{(k)}(t) = 0$$

6. Zusammenfassung

1 Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ gegeben und $x_0 \in (a,b)$. Die Funktion f heisst *differenzierbar an der Stelle* x_0, wenn es eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ gibt, so dass folgendes gilt: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon$$

2 Wenn f differenzierbar ist an der Stelle x_0, so ist die obige Zahl A eindeutig bestimmt. Diese Zahl A nennen wir die Ableitung von f an der Stelle x_0.

3 Falls der Limes existiert ist die Ableitung von f an der Stelle x_0 definiert durch

$$\begin{aligned} f'(x) \quad &:= \quad \tfrac{df}{dx}(x_0) \\ &:= \quad \lim_{x \to x_0} \tfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

4 Falls f differenzierbar ist an der Stelle x_0, so ist f auch stetig an der Stelle x_0.

5 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in I$. Dann gilt:
(i) $f + g$ ist differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$(f+g)' \cdot (x_0) \quad = \quad f'(x_0) + g'(x_0)$$

(ii) $f \cdot g$ ist differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$(fg)'(x_0) \quad = \quad f'(x_0)g(x_0) + f(x)g'(x_0) \qquad \textit{Leibnitz Regel}$$

(iii) Falls $g(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in I$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x) - f(x)g'(x_0)}{g(x)^2}$$

6 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle x_0, Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $y_0 := f(x_0)$. $\Rightarrow g \circ f$ ist differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$(g \circ f)' \quad = \quad g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

7 Wenn $f(x) = x^n$ dann ist $f'(x) = nx^{n-1}$

8 Die vektorwertige Abbildung $x : I \to \mathbb{R}^n$ heisst differenzierbar an der Stelle t_0, wenn der Limes: $\lim_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ existiert, d.h. $\exists\, v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, t \in I$

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \underbrace{\left\| \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} - v \right\|}_{\textit{Euklidische Norm}} < \varepsilon$$

9 x ist differenzierbar an der Stelle $t_0 \Leftrightarrow$ Jede der Funktionen $x_1, \dots, x_n : I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar an der Stelle t_0

10 Sei $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt $\exists\, \xi \in [a, b]$ so dass

$$f(x) \leq f(\xi) \qquad\qquad \forall\, x \in [a, b]$$

Ein solcher Punkt ξ heisst globales Maximum von f. Analog dazu das globale Minimum.

11 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Sei $\xi \in (a, b)$. ξ heisst lokales Maximum von f, wenn es eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass:

$$|\xi - x| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(\xi)$$

Analog das lokale Minimum.

12 ξ heisst lokales Extremum, wenn ξ entweder ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum ist.

13 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\xi \in (a, b)$ ein lokales Extremum. Sei f differenzierbar an der Stelle ξ.

$$\Rightarrow f'(\xi) = 0$$

14 Der Satz von Rolle lautet: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar an jedem Punkt im Inneren des Intervalls. Sei $f(a) = f(b)$, $\Rightarrow \exists\, \xi \in (a, b)$ so dass $f'(\xi) = 0$.

15 Der Mittelwertsatz lautet: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Intervall von $[a, b]$ differenzierbar. $\Rightarrow \exists\, \xi \in (a, b)$ so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

16 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $|f'(\xi)| \leq c \quad \forall\, \xi \in [a,b]$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_0)| \leq c\,|x_1 - x_0| \quad \forall\, x_0, x_1 \in [a,b]$$

17 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:
(i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$ f ist monoton wachsend
(ii) $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$ f ist strikt monoton wachsend

18 ei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ 2mal differenzierbar. Wenn $f''(x) > 0\ \forall\, x \in I$ dann ist f , das heisst $\forall\, a, b \in I,\ a < b,\ \forall\, t \in (0,1)$

$$f\bigl(ta + (1-t)b\bigr) < tf(a) + (1-t)f(b)$$

19 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 2mal stetig differenzierbar, $a < \xi < b$, $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) > 0$. Dann gilt
(i) ξ ist ein lokales Minimum von f
(ii) Falls $f''(x) > 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$ dann ist ξ ein globales Minimum von f.

20 Seien $f,\ g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass $\lim_{t\to b} f(t) = \lim_{t\to b} g(t) = 0$ und $g(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in (a,b)$. Dann gilt

$$\lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to b} \frac{f'(t)}{g'(t)} \text{ (falls der zweite Limes existiert)}$$

21 Das Polynom:

$$\mathrm{J}^n_{x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

heisst *Taylorpolynom* der Ordnung n von f an der Stelle x_0.

22 Sei f $(n+1)$-mal differenzierbar. $x > x_0 \in I$. Dann $\exists\, \xi \in (x_0, x)$, so dass der Fehler $R_n(x)$ bei der Taylor Annäherung

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

23 Sei $g : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar und $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$. $\Rightarrow$ für jedes $x \in I$ mit $x > x_0$ $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ so dass

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

24 Sei f unendlich oft differenzierbar. Die Potenzreihe:

$$\mathrm{J}^\infty_{x_0} f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

heisst Taylorreihe von f an der Stelle x_0.

KAPITEL 6

Integralrechnung

1. Integralbegriff

[V210102-S]ei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Was ist das Integral

$$\int_a^b f(x)dx \quad ?$$

$\int_a^b f(x)dx =$ Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $y = f(x)$.

Idee: einer mathematischen Definition des Integrals. Näherungsprozess, Approximation. Wir teilen das Intervall $I = [a,b]$ in viele kleine Intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$

Definition: Eine *Partition* oder *Zerlegung* des Intervalls $[a,b]$ ist eine endliche Teilmenge $P := \{x_0, \dots, x_n\} \subset [a,b]$, so dass $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Die Anzahl der Teilintervalle in der Partition P bezeichnen wir mit

$$N = N(P)$$

Das *Korn* der Partition P ist die maximale Länge der Teilintervalle und wird mit

$$\delta(P) := \max_{1 \le k \le N} (x_k - x_{k-1})$$

bezeichnet. Die Menge aller Partitionen des Intervalls $[a,b]$ wird mit $\wp(a,b)$ bezeichnet. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, das heisst $\exists\, M > 0$ so dass

$$|f(x)| \le M \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

Sei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \wp(a,b)$ eine Partition von $[a,b]$. Die *Untersumme* von f bezüglich P

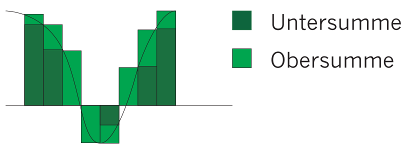


Abbildung 1. Unter- und Obersumme

ist die Zahl

$$\underline{S}(f,P) := \sum_{k=1}^{N} \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Die *Obersumme* ist

$$\overline{S}(f,P) := \sum_{k=1}^{N} \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Lemma 21:

$$\sup_{P \in \wp(a,b)} \underline{S}(f,P) \le \inf_{P \in \wp(a,b)} \overline{S}(f,P)$$

Beweis: (1) Wenn $P, Q \in \wp(a,b)$ so dass $P \subset Q$ (das heisst, Q ist feiner als P), dann gilt:

$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,Q)$

$\overline{S}(f,P) \geq \overline{S}(f,Q)$

z.B.

$Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$

$P = \{x_0, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,P) &= \inf_{[x_0,x_1]} f \cdot (x_1 - x_0) + \inf_{[x_1,x_2]} f \cdot (x_2 - x_1) - \inf_{[x_0,x_2]} f \cdot (x_2 - x_0) \\ &= \underbrace{\left(\inf_{[x_0,x_1]} f - \inf_{[x_0,x_2]} f\right)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{>0} + \underbrace{\left(\inf_{[x_1,x_2]} f - \inf_{[x_0,x_2]} f\right)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0^*\end{aligned}$$

(2) Seien $P, Q \in \wp(a,b) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,P) &\leq \underline{S}(f,P \cup Q) \\ &\leq \overline{S}(f,P \cup Q) \\ &\leq \overline{S}(f,Q)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \overline{S}(f,Q)$ ist eine obere Schranke der Menge $\{\underline{S}(f,P) \mid P \in \wp(a,b)\}$

$\Rightarrow \sup_{P \in \wp(a,b)} \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q)$. Dies gilt für jedes $Q \in \wp(a,b)$

$\Rightarrow \sup_{P \in \wp} \underline{S}(t,P) \leq \inf_{P \in \wp(a,b)} \overline{S}(t,P)$ $\square$

Definition: Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst *Riemann integrierbar*, wenn gilt:

$$\sup_{P \in \wp(a,b)} \underline{S}(t,P) = \inf_{P \in \wp(a,b)} \overline{S}(t,P)$$

In diesem Fall definieren wir das *Integral von f* durch:

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{P \in \wp(a,b)} \underline{S}(f,P) = \inf_{P \in \wp(a,b)} \overline{S}(f,P)$$

Satz 30: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $A \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist Riemann integrierbar und $A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_0 > 0 \quad \forall\, P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \wp(a,b)$

$$\left.\begin{array}{r}\delta(P) < \delta_0 \\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\end{array}\right\} \Rightarrow \left| A - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Bemerkung: Aussage (ii) kann man in der Form:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta(P) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

schreiben, wobei $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ und $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$

Beweis (Satz 30): $(ii) \Rightarrow (i)$: Wir setzen (ii) voraus und müssen zeigen:

$$\sup_{P \in \wp(a,b)} \underline{S}(t,P) = A = \inf_{P \in \wp(a,b)} \overline{S}(t,P)^\dagger$$

---

*Durch ähnliche Rechnung folgt $\overline{S}(f,P) \geq \overline{S}(f,Q)$

†Wir müssen also zwei Gleichungen zeigen, wobei beide ähnlich zu zeigen sind und wir deshalb nur die erste Gleichung beweisen

SCHRITT 1: $\sup_{P\in\wp(a,b)} \underline{S}(t,P) \leq A$ Sei $P \in \wp(a,b)$ und $\varepsilon > 0$. Sei δ_0 wie in (ii). $\Rightarrow \exists\, P_0 \in \wp(a,b)$ so dass $P \subset P_0$ und $\delta(P_0) < \delta_0$. Sei $P_0\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ und sei $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, N$. Dann gilt nach (ii):

$$\begin{array}{l} A - \xi < \displaystyle\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) < A + \varepsilon \\ \qquad\quad \vee \\ \qquad\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \inf_{[x_{k-1},x_k]} f\cdot(x_k - x_{k-1}) = \underline{S}(f,P_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & \underline{S}(f,P_0) & \leq & A+\varepsilon \\ \overset{P\subseteq P_0}{\Rightarrow} & \underline{S}(f,P) & \leq & \underline{S}(f,P_0) \leq A+\varepsilon \text{ Dies gilt für jedes } \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow & \underline{S}(f,P) & \leq & A \quad \forall\, P \in \wp(a,b) \\ \Rightarrow & \sup_{P\in\wp(a,b)} \underline{S}(f,P) & \leq & A \end{array}$$

SCHRITT 2: $\sup_{P\in\wp(a,b)} \underline{S}(t,P) \geq A$ Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $\delta_0 > 0$ wie in (ii). Sei $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \wp(a,b)$ eine Partition, so dass $\delta(P) < \delta_0$. Wähle $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, so dass

$$f(\xi_k) \leq \inf_{[x_{k-1},x_k]} f + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\overset{(ii)}{\Rightarrow} A - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq A + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{S}(f,P) &= \sum_{k=1}^{N} \inf_{[x_{k-1},x_k]} f\cdot(x_k - x_{k-1}) \\ &\geq \sum_{k=1}^{N} \big(f(\xi_k) - \frac{\varepsilon}{b-a}\big)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{k=1}^{N}(x_k - x_{k-1})}_{b-a} \\ &= \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \varepsilon \\ &\geq A - 2\varepsilon \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P \in \wp(a,b)$ so dass $\underline{S}(f,P) \geq A - 2\varepsilon$. $\Rightarrow \sup_{P\in\wp(a,b)} \underline{S}(f,P) \geq A$. Schritt 1 & 2 $\Rightarrow \sup_{P\in\wp(a,b)} \underline{S}(f,P) = A$. Genauso zeigt man $\inf_{P\in\wp(a,b)} \overline{S}(t,P) = A$

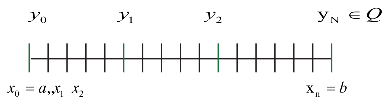
[V22-240102]

Beweis ($(i) \Rightarrow (ii)$): Zunächst beweisen wir folgendes:

Lemma 22: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $M > 0$, so dass $|f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in [a,b]$. Seien P,$Q \in \wp(a,b)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}(t,P) &\geq \underline{S}(f,Q) - 4M\cdot\delta(P)\cdot N(Q) \\ \overline{S}(t,P) &\leq \overline{S}(f,Q) + 4M\cdot\delta(P)\cdot N(Q) \end{aligned}$$

Beweis: Sei $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ und $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_N\}$.



Für $k = 1, \ldots, n$ sei

$$h_k^{\pm} = \begin{cases} \inf_{[x_{k-1},x_k]} f, & \text{falls } [x_{k-1}, x_k] \cap Q = \emptyset \\ \pm M, & \text{falls } [x_{k-1}, x_k] \cap Q \neq \emptyset \end{cases}$$

Der zweite Fall tritt höchstens $2 \cdot N(Q)$ mal auf[‡]

$$\sum_{k=1}^{n} (h_k^+ - h_k^-)(x_k - x_{k-1}) \leq 4M \cdot N(Q) \cdot \delta(P) \qquad (1)$$

Ausserdem: $h_k^- \leq \inf_{[x_{k-1},x_k]} \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}. \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} h_k^- \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \underline{S}(f, P) \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} h_k^+ \cdot (x_k - x_{k-1}) \geq \underline{S}(f, P \cup Q) \qquad (3)$$

Aus (1),(2),(3) folgt

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, P) &\overset{(2)}{\geq} \sum_{k=1}^{n} h_k^- \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &\overset{(1)}{\geq} \sum_{k=1}^{n} h_k^+ \cdot (x_k - x_{k-1}) - 4M \cdot \delta(P) \cdot N(Q) \\ &\overset{(3)}{\geq} \underline{S}(f, P \cup Q) - 4M \cdot \delta(P) \cdot N(Q) \\ &\geq \underline{S}(f, Q) - 4M \cdot \delta(P) \cdot N(Q) \end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung in Lemma 22 beweist man ähnlich.

Beweis (Satz 30 Seite 80 „$(i) \Rightarrow (ii)$“): [§] Gegeben sei $\varepsilon > 0$. Wir wissen (nach (i))

$$A = \sup_{Q \in \wp(a,b)} \underline{S}(f, Q) = \inf_{Q \in \wp(a,b)} \overline{S}(f, Q)$$

$\Rightarrow \exists\, Q_0 \in \wp(a, b)$ so dass $\underline{S}(f, Q_0) \geq A - \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow \exists\, Q_1 \in \wp(a, b)$ so dass $\overline{S}(f, Q_1) < A + \frac{\varepsilon}{2}$.
Sei $Q := Q_0 \cup Q_1$.

$$\Rightarrow A - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, Q) < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

Wähle $\delta_0 > 0$ so dass $4MN(Q)\delta_0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt $\forall\ P \in \wp(a, b),\ P = \{x_0, \ldots, x_n\} \quad \forall\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$: Falls $\delta(P) < \delta_0$ so erfüllt P folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, P) &\geq \underline{S}(f, Q) - 4M \cdot N(Q) \cdot \delta(P) \\ &> \underline{S}(f, Q) - 4M \cdot N(Q) \cdot \delta_0 \\ &> \underline{S}(f, Q) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &> A - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = A - \varepsilon \end{aligned}$$

[‡]ein Wert in Q überschneidet sich mit zwei Partitionen $\in P$, wenn er die Grenze zwischen letzteren bildet.
[§]A wie in Satz 30 Seite 80

Die zweite Ungleichung in Lemma 22 beweist man ähnlich. □. Wir haben also gezeigt $\delta(P) < \delta_0$

$$\Rightarrow \begin{array}{lcl} \underline{S}(f,P) & > & A-\varepsilon \\ \overline{S}(f,P) & < & A+\varepsilon \end{array}$$

$$A-\varepsilon \le \underline{S}(f,P) \le \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \le \overline{S}(f,P) < A+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| A - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

2. Eigenschaften des Riemann-Integrals

Satz 31: Seien $f, g : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $f+g$ und $\lambda \cdot f$ sind Riemann integrierbar und

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(ii) falls $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ so gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(iii) Die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, die durch $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ definiert ist, ist Riemann-integrierbar. Ebenso für $h := \min\{f(x)\}$

(iv) Die Funktion $[a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto |f(x)|$ ist Riemann-integrierbar und

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad (35)$$

Beweis: (i) Sei $A := \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ und $B := \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. Wir beweisen: Die Funktion $f+g$ erfüllt die Bedingung (ii) des Satzes 30. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. $\Rightarrow \exists\, \delta_0 > 0 \quad \forall\, P \in \wp(a,b)$, $P = \{x_0, \ldots, x_N\}$

$$\left.\begin{array}{r} \delta(P) < \delta_0 \\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \left| A - \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| & < & \frac{\varepsilon}{2} \\ \left| B - \sum_{k=1}^N g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| & < & \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$$

Sei $P = \{x_0, \ldots, x_N\} \in \wp(a,b)$ mit $\delta(P) < \delta_0$ und $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Dann gilt:

$$\left| A + B - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right|$$

$$\le \left| A - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| + \left| B - \sum_{k=1}^{N} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Die zweite Behauptung in (i) wird ähnlich bewiesen → *Siehe Anhang 4 auf Seite 191*

(ii) $f(x) \le g(x)$, $P = \{x_0, \ldots, x_N\} \in \wp(a,b)$

$$\Rightarrow \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \le \inf_{[x_{k-1},x_k]} g \text{ für } k = 1, \ldots, N$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{N} \inf_{[x_{k-1},x_k]} g \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$\Rightarrow \underline{S}(f,P) \le \underline{S}(g,P)$$

Nun ist $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \sup_{P\in\wp(a,b)} \underline{S}(g,P)$, das heisst insbesondere gilt $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \ge \underline{S}(g,P)\,\forall\, P \in \wp(a,b)$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \ge \underline{S}(f,P) \qquad \forall\, P \in \wp(a,b)$$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \ge \sup_{P\in\wp(a,b)} \underline{S}(f,P) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \forall\, P \in \wp(a,b)$$

(iii) *ohne Beweis*

(iv)

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) > 0 \\ -f(x), & \text{falls } f(x) < 0 \end{cases}$$
$$= \max\{f(x), 0\} + \max\{-f(x), 0\}$$

$$\overset{(iii)}{\Rightarrow} |f| \text{ ist integrierbar}, -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \quad \forall\, x$$

$$\overset{(ii)}{\Rightarrow} -\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \Rightarrow (iv) \quad \square$$

Bemerkung:

(1) Stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar

(2) Falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $F(x) := \int_a^b f(\xi)\,d\xi$ dann ist F differenzierbar und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$ =*Fundamentalsatz der Differential & Integralrechnung*

(3) Es gibt auch unstetige Funktionen, die Riemann-integrierbar sind

Beispiel 6.1:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \text{ rational} \\ 1, & x \text{ irrational} \end{cases} \text{¶}$$

f ist nicht Riemann-integrierbar. Es gibt andere Integralbegriffe, z.B. *Lebesque-Integral*, bezüglich welcher f integrierbar ist.

[V23-280102]

Satz 32: Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integriebar

Satz 33: *Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung*. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) := \int_a^x f(\xi)\,d\xi \qquad\qquad a \le x \le b$$

$\Rightarrow F$ ist differenzierbar und $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$.

¶Die sogenannte *Dirichletfunktion*

Korollar 14: Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion (d.h. F ist differenzierbar und $F' : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig). Dann gilt:

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Beweis: Sei $f := F' : [a,b] \to \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung ist f stetig.

$$\begin{array}{ll}
\overset{S32}{\Rightarrow} & f \text{ ist Riemann integrierbar. Sei } G(x) := \int_a^b f(\xi)\, d\xi \\
\overset{S33}{\Rightarrow} & G \text{ ist differenzierbar und } G' = f = F' \\
\Rightarrow & (F-G)' = F' - G' = 0 \\
\Rightarrow & F - G \text{ ist konstant.} \\
\Rightarrow & F(x) - G(x) = F(a) - G(a) = F(a) \qquad \forall\, x \in [a,b] \\
\overset{x=b}{\Rightarrow} & F(b) - G(b) = F(a) \\
\Rightarrow & F(b) - F(a) = G(b) = \int_a^b F'(x)\mathrm{d}x \qquad \square
\end{array}$$

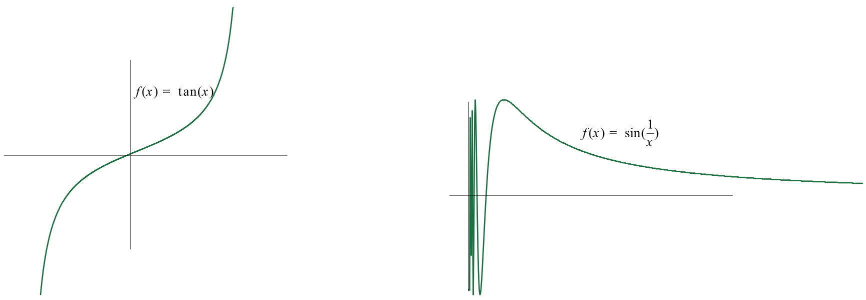
Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heisst *gleichmässig stetig* wenn gilt: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ so dass $\forall\, x, y \in I$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon^{\|}$$

Beispiel 6.2: $I = \mathbb{R}$. $f(x) = x^2$ ist stetig, aber nicht gleichmässig stetig. Denn je weiter entfernt von 0 wir das x_0 wählen, desto kleiner muss das δ sein.

$$(x+\delta)^2 - x^2 = 2x\delta + \delta^2 < \varepsilon$$

Beispiel 6.3: $f(x) = \tan(x)$, $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist nicht gleichmässig stetig. *Siehe Abb. 2(a)*



(a) $\tan x$ (b) $\sin 1/x$

Abbildung 2. Beispiel 6.6.3 und 6.6.4

Beispiel 6.4: $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $I = (0, 2\pi]$ ist nicht gleichmässig stetig. *Siehe Abb. 2(b)*

Satz 34: Sei $[a,b]$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. $\Rightarrow f$ ist gleichmässig stetig.

‖ Der Unterschied zur Stetigkeit liegt darin, dass wir für die ganze Funktion mit dem selben ε arbeiten können und es nicht mehr spezifisch, für x_0, wählen. *Anm.* = Die Ableitung hat eine obere Schranke.

Beweis: ANNAHME: f ist nicht gleichmässig stetig, das heisst $\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x, y \in [a, b]$ so dass

$$|x - y| < \delta \qquad\qquad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

$\Rightarrow\ \exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_0, y_0 \in [a, b]$ so dass $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
$\Rightarrow$ Da jede beschränkte Folge reeller Zahlen eine konvergente Teilfolge besitzt, (*Siehe Satz 11 von* Bolzano-Weierstrass *auf Seite 41*), existiert eine Teilfolge $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ so dass x_{n_k} und y_{n_k} konvergieren. Nun gilt $\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - y_{n_k}) = 0$
$\Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} =: x_0$
$\Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x_0)$
$\Rightarrow\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geq k_0\ |f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\exists\, k_1 \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geq k_1\ |f(y_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow$ Fall $k \geq \max\{k_0, k_1\}$
$\Rightarrow\ |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}| < \varepsilon$ Widerspruch $\square$

Beweis (Satz 32): Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ZU ZEIGEN:

$$\sup_{P\in\wp(a,b)} \underline{S}(f, P) = \inf_{P\in\wp(a,b)} \overline{S}(f, P)$$

wir wissen

$$\sup_{P\in\wp(a,b)} \underline{S}(f, P) \leq \inf_{P\in\wp(a,b)} \overline{S}(f, P)$$

wir werden zeigen

$$\sup_{P\in\wp(a,b)} \underline{S}(f, P) \geq \inf_{P\in\wp(a,b)} \overline{S}(f, P) - \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

Sei $\varepsilon > 0$

$$\overset{S34}{\Rightarrow} \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Sei $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \wp(a, b)$ so dass $\delta(P) = \max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1}) < \delta$
Es gibt Punkte ξ_k, $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ so dass

$$\max_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f(x) = f(\eta_k)$$
$$\min_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f(x) = f(\xi_k)$$

Siehe Abb. 3(a)

(a) Minimal- und Maximalwert in einer gegebenen Partition

(b) Fundamentalsatz der Algebra

ABBILDUNG 3

Da $x_k - x_{k-1} < \delta$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad |\xi_k - \eta_k| < \delta \\
&\Rightarrow \quad |f(\eta_k) - f(\xi_k)| < \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \textstyle\sum_{k=1}^n f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&\qquad = \textstyle\sum_{k=1}^n \big(f(\eta_k) - f(\xi_k)\big)(x_k - x_{k-1}) \\
&\qquad \leq \textstyle\sum_{k=1}^n \varepsilon(x_k - x_{k-1}) \\
&\qquad = \varepsilon(b-a) \\
&\Rightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P \in \wp(a,b) \text{ so dass} \\
&\qquad \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \leq \varepsilon(b-a) \\
&\Rightarrow \quad \underline{S}(f,P) \geq \overline{S}(f,P) - \varepsilon(b-a) \\
&\Rightarrow \quad \sup_P \underline{S}(f,P) \geq \inf_P \overline{S}(f,P) - \varepsilon(b-a) \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \\
&\Rightarrow \quad \sup_P \underline{S}(f,P) \geq \inf_P \overline{S}(f,P) \\
&\Rightarrow \quad \sup_P \underline{S}(f,P) = \inf_P \overline{S}(f,P)
\end{aligned}
$$

Das heisst f ist Riemann-integrierbar. □

Beweis (Satz 33): *Siehe Abb. 3(a)*

$$F(x) = \int_a^b f(\xi)\, d\xi$$

ZU ZEIGEN:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \xrightarrow{h \to 0} f(x)$$

BEMERKUNG: $a < b < c$, f Riemann-integrierbar

$$\Rightarrow \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{x+h} f(\xi)\, d\xi - \frac{1}{h}\int_0^x f(\xi)\, d\xi \\
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\, d\xi \\
\Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\, d\xi - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\, d\xi \\
\Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(\xi) - f(x)\big)\, d\xi \\
\Rightarrow \left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| &\leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(\xi) - f(x)|\, d\xi \\
\Rightarrow \left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| &\leq \max_{x \leq \xi \leq x+h} |f(\xi) - f(x)| \quad \forall\, h > 0 \quad (*)
\end{aligned}
$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$$\overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \xi \in [x, x+h] \quad |\xi - x| < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall\, h \in (0,\delta) \max_{x \leq \xi \leq x+h} |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \forall\, h \in (0,\delta)$$

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| < \varepsilon$$

Genauso zeigt man dass

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{-h} - f(x)\right| \leq \max_{x-h\leq\xi\leq x} |f(\xi)-f(x)| < \varepsilon$$

sofern $0 < h < \delta$. Das heisst wir haben gezeigt $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\,h \in \mathbb{R},\, 0 < |h| < \delta$

$$\Rightarrow \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| < \varepsilon$$

Das heisst F ist differenzierbar an der Stelle x und $F(x) = f(x)$ $\square$

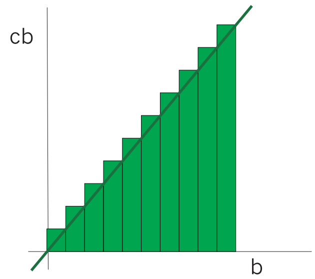


Abbildung 4. Beispiel 6.5

Beispiel 6.5: *Siehe Abb. 4.* $f(x) = c \cdot x$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(x) &:= \frac{cx^2}{2} \\ \Rightarrow F'(x) &= f(x) \\ \Rightarrow \int_0^b cx\mathrm{d}x &= F(b) - F(0) \\ &= \frac{cb^2}{2} \end{aligned}$$

Satz 35: [V24-310102] *Substitution* Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\varphi'(\xi) \geq 0$ und $f : [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(\xi)\big)\varphi'(\xi)\,d\xi$$

Beweis: Sei $F : [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar so dass $F' = f$.

$$\begin{aligned} (F \circ \varphi)' &= (F' \circ \varphi)\varphi' \\ \Rightarrow \int_a^b f \circ \varphi(\xi) \cdot \varphi'(\xi)\,d\xi &= \int_a^b (F \circ \varphi)' \\ &= F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F'(x)\mathrm{d}x \qquad \square \end{aligned}$$

Satz 36 (Partielle Integration): Sei $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x + f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Beweis: $F(x) := f(x)g(x)$

$$\Rightarrow F' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\Rightarrow \int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad \square$$

3. Fourier-Reihen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heisst 2π-*periodisch* wenn

$$f(t + 2\pi) = f(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Beispiel 6.6: $e_k(t) = e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt) \quad k \in \mathbb{Z}$

IDEE: Wir wollen eine 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ darstellen in der Form

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} \qquad a_k \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

1. FRAGE: Wie bestimmen wir die Koeffizienten a_k?

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \cdot e^{-ilt}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t}\, dt$$

falls $k \neq l$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{i(k-l)} e^{i(k-l)t} \right) dt \\ &= \frac{1}{i(k-l)} e^{i(k-l)t} \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} \\ &= \frac{1}{i(k-l)} \left(e^{i(k-l)\pi} - e^{-i(k-l)\pi} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

falls $k = l$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^0\, dt = 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e_k(t) e_{-l}(t)\, dt = \begin{cases} 2\pi, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

Lemma 23: Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 2π-periodische Funktion ist und es Koeffizienten a_k gibt, so dass die Reihe (1) *gleichmässig gegen* f *konvergiert* so gilt:

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

Beweis: Sei $f_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$. Nach Voraussetzung konvergiert f_n gleichmässig gegen f

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) e^{-ikt}\, dt$$

Nun gilt für $n \geq |k|$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)e^{-ikt}\,dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=-n}^{n} a_l e^{ilt} e^{-ikt}\,dt \\ &= \sum_{l=-n}^{n} a_l \int_{-\pi}^{\pi} e^{ilt} e^{-ikt}\,dt = 2\pi a_k \qquad \square\end{aligned}$$

Definition: Gegeben sei eine stetige, 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Die komplexen Zahlen

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt \quad k \in \mathbb{Z}$$

heissen *Fourier-Koeffizienten von f*

2. Frage: Für welche Funktionen von f konvergiert die Reihe

$$S_\infty f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} \quad ?$$

(Das heisst die Folge $S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx}$ konvergiert.)

3. Frage: Falls die Folge $S_n f$ konvergiert, ist der Grenzwert auch wirklich die Funktion f?

4. Faltung

Definition: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetige 2π-periodische Funktionen. Die *Faltung* $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}f * g(x) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt \qquad \textit{Beweis siehe Anhang 5 Seite 191}\end{aligned}$$

Beispiel 6.7: $e_k(t) = e^{ikt}$

$$\begin{aligned}f * e_k(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt \cdot e^{ikx} \\ f * g(x) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,dt\end{aligned}$$

Beispiel 6.8: $D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f * D_n(x) &= f * \left(\sum_{k=-n}^{n} e_k \right)(x) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} f * e_k(x) \overset{B6.6.7}{=} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e_k(x) = S_n f(x)\end{aligned}$$

$S_n f = f * D_n \qquad (36)$

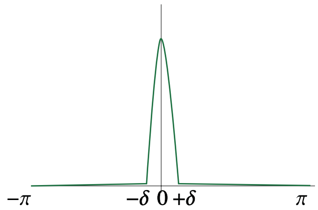


Abbildung 5. Die Faltung, ausserhalb des Intervalls $[-\pi, \pi]$ ist $g(x) = f(x) = 0$

5. Der wichtigste Trick

Statt $S_n f$ betrachten wir die Funktionen

$$\begin{aligned}
\sigma_n f(x) &:= \frac{1}{n}\big(S_0 f(x) + S_1 f(x) + \dots + S_{n-1} f(x)\big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k f(x) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f * D_k(x) \\
&= \left(f * \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)\right)(x) \\
F_n(x) &= \frac{1}{n}\big(D_0(x) + \dots + D_{n-1}(x)\big) \\
\sigma_n f &= f * F_n
\end{aligned}$$

Satz 37 (Fejér): Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 2π-periodische Funktion $\Rightarrow$ Die Folge $\sigma_n f$ konvergiert gleichmässig gegen f.

Lemma 24: (i) $x \notin 2\pi \cdot \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

(ii) $F_n(x) \geq 0$
(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\mathrm{d}x = 2\pi$ *Siehe Abb. 5*
(iv) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in [-\pi, \pi] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$n \geq n_0, \quad \delta \leq |x| \leq \pi \Rightarrow F_n(x) \leq \varepsilon$$

Beweis: (i) *siehe unten*
(ii) folgt aus (i)
(iii) folgt aus der Definition von F_n
(iv) folgt aus (i)

Beweis (von (i)):

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} \\
&= e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}\left(e^{ix}\right)^x = e^{-inx}\frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&& &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}}} \\
&& &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \\
\Rightarrow && \sin\frac{x}{2} D_n(x) &= \sin(n+\frac{1}{2})x \\
\Rightarrow && n\cdot\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 \cdot F_n(x) &= \sin\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{x}{2}\cdot D_k(x) \\
&& &= \sin\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x \\
&& &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\cos(kx)-\cos(k+1)x\right) \\
&& &= \frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos nx\right) \\
&& &= \left(\sin\frac{nx}{2}\right)^2 \qquad \square
\end{aligned}
$$

Beweis (Satz ??):

$$
\begin{aligned}
\text{Sei } M &:= \max_{-\pi\le x\le\pi} |f(x)| \\
&= \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|
\end{aligned}
$$

SEI $\varepsilon > 0$ GEGEBEN:

(1) Wähle $\delta > 0$ so dass $|x| \le \pi, \quad |t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x-t)| < \frac{\varepsilon}{2}$
(2) Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\delta \le |x| \le \pi, \quad n \ge n_0 \Rightarrow F_n(t) \le \frac{\varepsilon}{4M}$

$$
\begin{aligned}
|f(x) - \sigma_n f(x)| &= \left| f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)\,dt \right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - f(x-t)\right) F_n(t)\,dt \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x-t)|\, F_n(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} \underbrace{|f(x)-f(x-t)|}_{\le 2M} \underbrace{F_n(t)}_{\le\frac{\varepsilon}{4M}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} \underbrace{|f(x)-f(x-t)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \underbrace{F_n(t)}_{\le\frac{\varepsilon}{4M}}\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \underbrace{|f(x)-f(x-t)|}_{\le 2M}\cdot \underbrace{F_n(t)}_{\le\frac{\varepsilon}{4M}}\,dt \\
&\le \frac{1}{2\pi}(\pi-\delta)2M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(t)\,dt}_{\le 1} + \frac{1}{2\pi}(\pi-\delta)2M\frac{\varepsilon}{4M} \\
&< \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Das heisst $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \ge n_0 \quad \forall\, x \in [-\pi,\pi] \quad |f(x) - \sigma_n f(x)| < \varepsilon$ $\square$

BEMERKUNG: Sei $a_n \in \mathbb{R}$ eine Folge. Sei $s_n := \frac{1}{n}(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})$. Dann gilt

$a_n \to a \Rightarrow s_n \to a$ Beweis Übung

$a_n \to a \not\Leftarrow s_n \to a$

Beispiel 6.9: $a_n = S_n f(x) \Rightarrow s_n = \sigma_n f(x)$

Korollar 15: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig 2π-periodisch. Falls $S_n f(x)$ konvergiert für ein $x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n f(x)$$

Bemerkung: Es gibt Beispiele stetiger 2π-periodischer Funktionen, so dass die Folge $S_n f(x)$ nicht für jedes x konvergiert.

Bemerkung: Falls f 2mal stetig differnzierbar und 2π-periodisch ist, so konvergiert $S_n f$ gleichmässig gegen f.

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= -\frac{1}{k}\hat{f}'(k) \\ &= -\frac{1}{k^2}\hat{f}''(k) \end{aligned}$$

[V25-040202]

6. Beispiele für Exponentialfunktionen

Beispiel 6.10: *Radioaktiver Zerfall*

$$\boxed{\text{X}} \to \boxed{\text{Y}} \to \boxed{\text{Z}}$$

$N(t) =$ Anzahl der Atome von X zur Zeit t.
$\lambda \cdot \triangle t =$ Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom der Substanz X im Zeitintervall $[t, t + \triangle t]$ zerfällt. $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} N(t + \triangle t) &= N(t) - N(t) \cdot \lambda \cdot \triangle t \\ \frac{N(t + \triangle t) - N(t)}{\triangle t} &= -\lambda \cdot N(t) \end{aligned}$$

m_X Masse eines Atoms. $\Rightarrow$ Gesamtmasse $= x(t) = N(t) \cdot m_X$

$$\frac{x(t + \triangle t) - x(t)}{\triangle t} = -\lambda x(t) \qquad \triangle t \to 0$$

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = -\lambda x(t) \\ &x(t) = x_0 e^{-\lambda t} \qquad x(0) = x_0 \quad = \text{Anfangsmasse} \\ &y(t) = \text{Masse der Substanz } Y \text{ zur Zeit } t \\ &\dot{x} = -\lambda x \qquad (1) \\ &\dot{y} = \lambda x - \mu y \qquad \lambda > 0, \mu^{**} > 0 \\ &\dot{z} = \mu y \\ &\dot{x}(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}(t) \end{aligned}$$

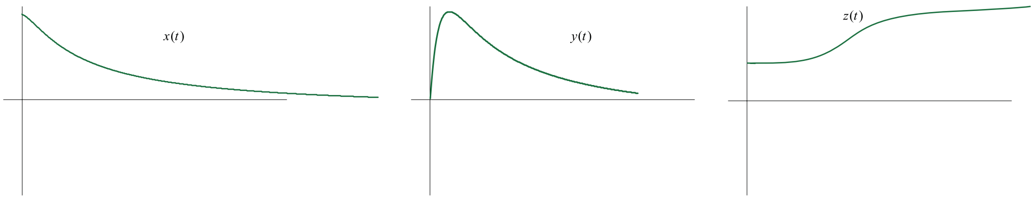
Seien gegeben

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \qquad x(t) = x_0 e^{-\lambda t} \\ y(0) &= y_0 \\ z(0) &= z_0 \end{aligned}$$

Ansatz:

$$y(t) = Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t}$$

$^{**}\mu$ Zerfallskonstante der Substanz Y



(a) $x(t)$ (b) $y(t)$ (c) $z(t)$

Abbildung 6. Der radioaktive Zerfall, Beispiel 6.6.10

Gibt es zwei Variabeln A,B, welche die Gleichung $\dot{y} = \lambda x - \mu y$ löst?

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= -\lambda A e^{-\lambda t} - \mu B e^{-\mu t} \\
&\overset{?}{=} \lambda x_0 e^{-\lambda t} - \mu A e^{-\lambda t} - \mu B e^{-\mu t} \\
&\Leftrightarrow \big(- \lambda x_0 + (\mu - \lambda) A \big) e^{-\lambda t} = 0
\end{aligned}$$

Annahme $\lambda \neq \mu$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow A &= \frac{\lambda x_0}{\mu - \lambda} \\
B &= y_0 - \frac{\lambda x_0}{\mu - \lambda} \\
\Rightarrow y(t) &= \frac{\lambda x_0}{\mu - \lambda} \cdot e^{-\lambda t} + \left(y_0 - \frac{\lambda x_0}{\mu - \lambda} \right) e^{-\mu t}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrll}
\overset{(1)}{\Rightarrow} & \dot{x} + \dot{y} + \dot{z} & = 0 & \\
\Rightarrow & x(t) + y(t) + z(t) & = const & \\
& & = x_0 + y_0 + z_0 & \\
\Rightarrow & z(t) & = x_0 + y_0 + z_0 - x(t) - y(t) & \\
& x(t) & \to 0 & \textit{siehe Abb. 6(a)} \\
& y(t) & \to 0 & \textit{siehe Abb. 6(b)} \\
& z(t) & \to x_0 + y_0 + z_0 &
\end{array}$$

Beispiel 6.11: *Gedämpfte Schwingung siehe Abb. 7(a)*
Newtons Gleichungen

$$m\ddot{x}(t) = \text{Kraft} = -\underbrace{f x(t)}_{Feder} + \underbrace{\text{Äussere Kräfte}}_{=0}$$

$\dot{x}$ = Geschwindigkeit, $\ddot{x}$ = Beschleunigung

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + f x(t) = 0 \qquad (2)$$

Anfangsbedingung $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$

ANSATZ: $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$
$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$x(t) = e^{\lambda t}$ ist Lösung von (2).

$$\Leftrightarrow (m\lambda^2 + b\lambda + f)e^{\lambda t} = 0$$
$$\Leftrightarrow m\lambda^2 + b\lambda + f = 0 \qquad (3)$$

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}\lambda^2 + \frac{b\lambda}{m} + \frac{b^2}{4m^2} &= \frac{b^2}{4m^2} - \frac{f}{m} \\ &= \frac{b^2 - 4mf}{4m^2}\end{aligned}$$

$b^2 > 4mf$

$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4mf}}{2m}$$

$b^2 < 4mf$

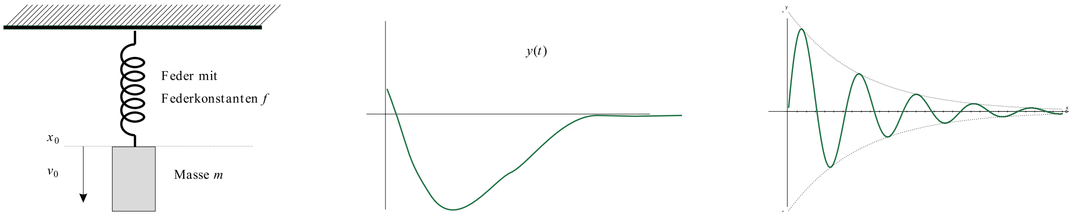
$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm i\frac{\sqrt{4mf - b^2}}{2m}$$
$$\lambda_1 = -\frac{b}{2m} + i\frac{\sqrt{4mf - b^2}}{2m} \qquad \lambda_2 = -\frac{b}{2m} - i\frac{\sqrt{4mf - b^2}}{2m}$$

ANSATZ:

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ x(0) &= x_0 = c_1 + c_2 \\ \dot{x}(0) &= c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 \\ c_1 &= \frac{v_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ c_2 &= \frac{v_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\end{aligned}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + fx = 0 \qquad b^2 < 4mf$$
$$m\lambda^2 + b\lambda + f = 0$$

$$\lambda_1 = -a + i\omega \qquad a = \frac{b}{2m}$$
$$\lambda_2 = -a - i\omega \qquad \omega = \frac{\sqrt{4mf - b^2}}{2m}$$
$$e^{\lambda_1 t} = e^{-at} \cdot e^{i\omega t} \qquad e^{\lambda_2 t} = e^{-at} \cdot e^{-i\omega t}$$
$$\hookrightarrow \frac{e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}}{2} = e^{-at} \cdot \cos(\omega t) \qquad \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{2i} = e^{-at} \cdot \sin(\omega t) \hookleftarrow$$



(a) Versuchsanordnung der gedämpften Schwingung

(b) Starke Dämpfung

(c) Schwache Dämpfung

Abbildung 7. Beispiel 6.6.11

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{-at}\big(c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t\big)$$

$$c_1 = x(0) = x_0 \qquad\qquad c_2 = \frac{v_0 + a x_0}{\omega}$$

$$\begin{aligned} v_0 = \dot{x}(0) &= -ac_1 + \omega c_2 \\ &= -ax_0 + \omega c_2 \end{aligned}$$

Beispiel 6.12: *Siehe Abb. 8(a)*

$$U = U_C + U_L + U_R \qquad\qquad U_C = \frac{q}{C}$$

$$U_L = \frac{dI}{dt} \qquad\qquad U_R = R \cdot I$$

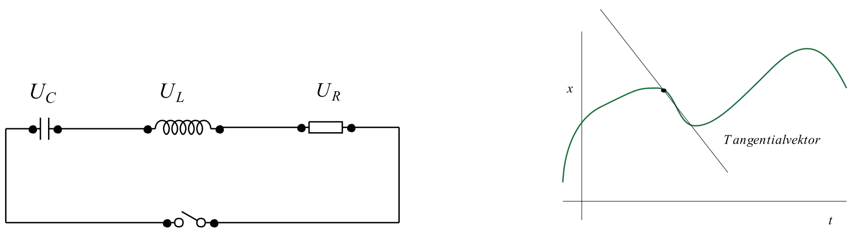
$$q = \text{Ladungsmenge} \qquad\qquad C = \text{Kapazität}$$

$$U(t) \equiv const \qquad\qquad I(t) = \frac{dq}{dt}$$

$$\dot{U}_C(t) + \dot{U}_L(t) + \dot{U}_R(t) = \dot{U}(t) = 0$$

$$\frac{1}{C} I(t) + L\ddot{I}(t) + R \cdot \dot{I}(t) = 0$$

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = 0 \quad (3) \qquad\qquad I(t) = e^{\lambda t}$$



(a) RCL-Schaltbild, Beispiel 6.6.12

(b) Tangentenvektor

Abbildung 8

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ *siehe Abb. 8(b)*

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big) \quad (4)$$
$$x(t_0) = x_0 \qquad \textit{Anfangswertproblem}$$

Gegeben sei

- Eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
- Eine stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$
- Einen Punkt $(t_0, x_0) \in \Omega$

FRAGE: Gibt es ein (Zeit)-Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion $x : I \to \mathbb{R}$ so dass $t_0 \in I$ und x eine Lösung von (4) ist? Ist diese Lösung eindeutig? *Nein*

Beispiel 6.13: $f(t,x) = -\frac{t}{x}$, $x > 0$. $\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$

$$\dot{x}(t) = -\frac{t}{x(t)} \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{t}{x(t)} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix} \qquad x(0) = x_0 > 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \sqrt{x_0^2 - t^2} \qquad -x_0 < t < x_0$$

Beispiel 6.14: $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(t,x) = x^2$

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 \qquad (5)$$

ANSATZ: $x(t) = ct^\alpha$

$$\dot{x}(t) = c\alpha t = x(t)^2 = c^2 t^{2\alpha}$$
$$x(t) = \text{Lösung von (5)}$$
$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2\alpha &= \alpha - 1 \\ c\alpha &= c^2 \end{aligned}\right\} c = \alpha = -1$$
$$x(t) = -\frac{1}{t}$$

ALLGEMEINE LÖSUNG: $x(t_0) = x_0$, $\alpha = t_0 + \frac{1}{x_0}$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\frac{1}{x_0} + t_0 - t} \\ &= \frac{1}{a - t} \end{aligned}$$

Beispiel 6.15: $f(t,x) = \sqrt{|x|}$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4}, & t \geq 0 \\ -\frac{t^2}{4}, & t \leq 0 \end{cases} \qquad x_0 = 0$$

$$\dot{x} = \sqrt{|x|}$$

Zweite Lösung

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 - t^2} \qquad 5 - x_0 < t < x_0$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ [V26-070202]

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

ERINNERUNG: f heisst *Lipschitz-stetig* wenn es eine Zahl $c > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

Satz 38: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig, $\Rightarrow$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert genau eine stetig differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die die Gleichung 1 erfüllt. *ohne Beweis.*

Beispiel 6.16: $f(x) = \sqrt{|x|}$, $n = 1$. Es gibt mehrere Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|} \qquad x(0) = 0$$

$$x(t) = \pm\frac{|x(t)|^{\frac{3}{2}}}{3}\,\dagger\dagger$$

$\Rightarrow f$ ist nicht Lipschitz-stetig

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \xrightarrow{x \to 0} \infty$$

7. Ableitung in $\mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \qquad x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Gleichung (1) $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, \dots, x_n) & x_1(0) &= x_{01} \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, \dots, x_n) & x_2(0) &= x_{02} \\ \vdots\ & \quad \vdots & \vdots\ & \quad \vdots \\ \dot{x}_n &= f(x_1, \dots, x_n) & x_n(0) &= x_{0n} \end{aligned}$$

8. Zusammenfassung

1 $\int_a^b f(x)dx =$ Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $y = f(x)$

2 Eine Partition oder Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Teilmenge $P := \{x_0, \dots, x_n\} \subset [a, b]$, so dass $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Die Anzahl der Teilintervalle in der Partition P bezeichnen wir mit $N(P)$

3 Das Korn der Partition P ist die maximale Länge der Teilintervalle und wird mit

$$\delta(P) := \max_{1 \leq k \leq N} (x_k - x_{k-1})$$

bezeichnet.

4 Die Menge aller Partitionen des Intervalls $[a, b]$ wird mit $\wp(a, b)$ bezeichnet.

5 Sei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \wp(a, b)$ eine Partition von $[a, b]$. Die Untersumme von f bezüglich P ist die Zahl

$$\underline{S}(f, P) := \sum_{k=1}^{N} \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

††Meinung des Autors

Die Obersumme ist

$$\overline{S}(f,P) := \sum_{k=1}^{N} \sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\cdot(x_k - x_{k-1})$$

6 $\sup_{P\in\wp(a,b)} \underline{S}(f,P) \le \inf_{P\in\wp(a,b)} \overline{S}(f,P)$

7 Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heisst Riemann integrierbar, wenn gilt:

$$\sup_{P\in\wp(a,b)} \underline{S}(t,P) = \inf_{P\in\wp(a,b)} \overline{S}(t,P)$$

In diesem Fall definieren wir das Integral von f durch

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{P\in\wp(a,b)} \underline{S}(f,P) = \inf_{P\in\wp(a,b)} \overline{S}(f,P)$$

8 Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $A\in\mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) f ist Riemann integrierbar und $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
(ii) $\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta_0>0 \quad \forall\,P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}\in\wp(a,b)$

$$\left.\begin{array}{r}\delta(P)<\delta_0\\ \xi_k\in[x_{k-1},x_k]\end{array}\right\} \Rightarrow \left|A-\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\cdot(x_k-x_{k-1})\right| < \varepsilon$$

9 Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und $M>0$, so dass $|f(x)|\le M \quad \forall\,x\in[a,b]$. Seien P,$Q\in\wp(a,b)$. Dann gilt

$$\underline{S}(t,P) \ge \underline{S}(f,Q) - 4M\cdot\delta(P)\cdot N(Q)$$
$$\overline{S}(t,P) \le \overline{S}(f,Q) + 4M\cdot\delta(P)\cdot N(Q)$$

10 Seien $f,g:[a,b]\Rightarrow\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar sei $\lambda\in\mathbb{R}$. Dann gilt:
(i) $f+g$ und $\lambda\cdot f$ sind Riemann integrierbar und

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(ii) falls $f(x)\le g(x)$ für alle $x\in[a,b]$ so gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(iii) Die Funktion $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, die durch $h(x):=\max\{f(x),g(x)\}$ definiert ist, ist Riemann-integrierbar. Ebenso für $h:=\min\{f(x)\}$
(iv) Die Funktion $[a,b]\to\mathbb{R}: x\mapsto|f(x)|$ ist Riemann-integrierbar und

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

11 Stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar, es gibt aber auch unstetige Funktionen, die Riemann-integrierbar sind.

12 Falls $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig ist und $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definiert ist durch $F(x):=\int_a^b f(\xi)\,d\xi$ dann ist F differenzierbar und $F'(x)=f(x)$ für alle $x\in[a,b]$. Dies ist der Fundamentalsatz der Differential- & Integralrechnung.

13 Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion (d.h. F ist differenzierbar und $F' : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig). Dann gilt:

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

14 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heisst gleichmässig stetig wenn gilt: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ so dass $\forall\, x, y \in I$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

15 Sei $[a, b]$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. $\Rightarrow f$ ist gleichmässig stetig.

16 Substitution: Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\varphi'(\xi) \geq 0$ und $f : [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(\xi)\big)\varphi'(\xi)\, d\xi$$

17 Sei $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x + f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

18 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heisst 2π-*periodisch* wenn

$$f(t + 2\pi) = f(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

19 Eine $2\pi-$periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lässt sich darstellen in der Form

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} \qquad a_k \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

20 Für die a_k gilt

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt$$

21 Gegeben sei eine stetige, 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Die komplexen Zahlen

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt \quad k \in \mathbb{Z}$$

heissen Fourier-Koeffizienten von f.

22 Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetige 2π-periodische Funktionen. Die Faltung $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} f * g(x) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x - t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)g(t)\, dt \end{aligned}$$

23 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig 2π-periodisch. Falls $S_n f(x)$ konvergiert für ein $x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n f(x)$$

24 Es gibt Beispiele stetiger 2π-periodischer Funktionen, so dass die Folge $S_n f(x)$ nicht für jedes x konvergiert.

KAPITEL 7

Skalare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(2) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_1 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ y^{(n-1)}(0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

Idee: (2) auf (1) zurückführen. Gegeben sei eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von 2. Wir definieren $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} x_0(t) &:= y(t) & \dot{x}_0 &= x_1 \\ x_1(t) &:= y'(t) & \dot{x}_1 &= x_2 \\ \vdots \quad &\quad \vdots & \vdots \quad &\quad \vdots \\ & & \dot{x}_{n-2} &= x_{n-1} \\ x_{n-1}(t) &:= y^{(n-1)}(t) & \dot{x}_{n-1} &= -a_0 x_0 - a_1 x_1 - \cdots - a_{n-1}x_{n-1} \end{aligned}$$

Sei $C^\infty(\mathbb{R})$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$). Sei $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ der Operator

$$Dy := y'$$

(1) D ist linear.

$$\begin{aligned} D(y_1 + y_2) &= Dy_1 + Dy_2 \\ D(\alpha y) &= \alpha Dy & \alpha \in \mathbb{R}, y, y_1, y_2 \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} Dy^2 &= D(Dy) \\ &= y'' \\ Dy^k &= y^{(k)} \end{aligned}$$

(3) Sei $L : \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$Ly := D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y$$

Dann ist Gleichung 2 äquivalent zu

$$Ly = 0$$

L ist linear.

(4) Der Raum der Lösungen

$$\mathcal{L} = \{y \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid Ly = 0\}$$

ist ein $n-$dimensionaler Vektorraum

(5) Eine Basis von $\mathcal{L}$ ist gegeben durch die Funktionen $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ wobei Y_j die Lösung der Gleichung 2 ist mit der Anfangsbedingung

$$Y_j^{(k)} = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = j \end{cases}$$

das heisst jede Lösung von 2 lässt sich in der Form

$$y(t) = c_0 Y_0(t) + c_1 Y_1(t) + \cdots + c_{n-1} Y_{n-1}(t)$$

schreiben.

(6) $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, p heisst *charakteristisches Polynom* von 2

FORMAL:

$$L = p(D)$$

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

$$\begin{aligned} De^{\lambda t} &= \lambda e^{\lambda t} \\ D^k e^{\lambda t} &= \lambda^k e^{\lambda t} \\ \Rightarrow Le^{\lambda t} &= p(D)e^{\lambda t} \\ &= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} \\ &= p(\lambda)e^{\lambda t} \\ p(D)e^{\lambda t} &= p(\lambda)e^{\lambda t} = 0 \end{aligned}$$

(7) Die Funktion $y(t) = e^{\lambda t}$ ist eine Lösung von Gleichung 2 genau dann, wenn $p(\lambda) = 0$

ANNAHME: p hat genau n verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\Rightarrow Y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \ldots, Y_n(t) = e^{\lambda_n t}$.

Satz 39: *ohne Beweis* In diesem Fall bilden die Funktionen $Y_1, \ldots, Y_n$ eine Basis von $\mathcal{L}$

Korollar 16: Jede Lösung von Gleichung 2 *(Seite 101)* lässt sich in der Form

$$y = c_1 Y_1 + \cdots + c_n Y_n$$

schreiben.

Beispiel 7.1:

$$\begin{aligned} y^n + \omega^2 y &= 0 \\ p(\lambda) &= \lambda^2 + \omega^2 = 0 \\ \lambda &= \pm i\omega \\ y_1(t) &= e^{i\omega t} \qquad\qquad y_2(t) = e^{-i\omega t} \\ &= \cos\omega t + i \sin\omega t \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Allgemein: Sei $p(\lambda)$, $\lambda = ai\omega$. (Seien die Kraft von p in $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\lambda t} \\ &= e^{at} \cdot e^{i\omega t} \\ &= e^{at}(\cos\omega + i\sin\omega t) \end{aligned}$$

ist komplexe Lösung von Gleichung 2. $\Rightarrow \Re y$, $\Im y$ sind reelle Lösungen von Gleichung 2

Beispiel 7.2: $p(\lambda) = \lambda^n$, $y^{(n)} = 0$ Allgemeine Lösung: $y(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1}t^{n-1}$.

Allgemein: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine *mehrfache* Nullstelle von p (der Ordnung n), das heisst:

$$p(\lambda) = \hat{p}(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^m \qquad \hat{p}(\lambda_0) \neq 0$$

Ansatz:

$$y(t) = \underbrace{\left(c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1}t^{n-1}\right)}_{q(t)}$$

$$\begin{aligned} (D-\lambda_0)y &= Dy - \lambda_0 y \\ &= y' - \lambda_0 y \\ &= q'(t)e^{\lambda_0 t} + \lambda_1 q(t)e^{\lambda_0 t} - \lambda y(t) \\ &= q'(t)e^{\lambda_0 t} \\ (D-\lambda_0)qe^{\lambda_0 t} &= q'e^{\lambda_0 t} \\ (D-\lambda_0)^k qe^{\lambda_0 t} &= q^{(k)}e^{\lambda_0 t} \\ \Rightarrow (D-\lambda_0)^k qe^{\lambda_0 t} &= 0 \\ \Rightarrow L(qe^{\lambda_0 t}) &= p(D)qe^{\lambda_0 t} \\ &= \hat{p}(D)(D-\lambda_0)^m(qe^{\lambda_0 t}) = 0 \end{aligned}$$

Annahme stimmt!

Allgemeine Regel: Nullstellen von p: $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Multiplizität $m_1, \ldots, m_k$. $\Rightarrow$ Jede Lösung von Gleichung 2 *(Seite 101)* hat die Form:

(3) $$y(t) = q_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + q_k(t)e^{\lambda_k t}$$

Wobei $q_j(t)$ eine Polynom vom Grad $\deg(q_j) < m_j$ ist. Es gilt $n = m_1 + \cdots + m_k$

1. Inhomogene Gleichung

$Ly = f, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(4) $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f$$

Bemerkung: Sei $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung von Gleichung 4 ist und $Y_1, \ldots, Y_n$ eine Basis von $\mathcal{L}$

$\Rightarrow$ Jede Lösung von (4) hat die Form $y(t) = y_0(t) + c_1 Y_1(t) + \cdots + c_n Y_n(t)$

Beispiel 7.3: $f(t) = e^{\lambda_0 t}$, $p(\lambda_0) \neq 0$

Ansatz: $y(t) = ce^{\lambda_0 t}$

$$Ly = cLe^{\lambda_0 t} = cp(\lambda_0)e^{\lambda_0 t} \stackrel{!}{=} e^{\lambda_0 t}$$

Wir wählen $c = \frac{1}{p(\lambda_0)}$

$$y(t) = \frac{e^{\lambda_0 t}}{p(\lambda_0)}$$

2. FALL: $f(t) = e^{\lambda_0 t}$

$$p(\lambda_0) = 0 \qquad m\text{-fache Nullstelle}$$
$$p(\lambda) = \hat{p}(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^m \qquad \hat{p}(\lambda_0) \neq 0$$

ANSATZ: $y(t) = ct^m e^{\lambda_0 t}$

$$\begin{aligned}
(D - \lambda_0)y &= cmt^{m-1}e^{\lambda_0 t} \\
\Rightarrow (D - \lambda_0)^m y &= cm'_1 e^{\lambda_0 t} \\
Ly &= \hat{p}(D)(D - \lambda_0)^m y \\
&= cm!\hat{p}(D)e^{\lambda_0 t} \\
&= \underbrace{cm!\hat{p}(\lambda_0)e^{\lambda_0 t}}_{=1} \\
c &= \frac{1}{m!\hat{p}(\lambda_0)} \qquad \hat{p}(\lambda_0) \neq 0
\end{aligned}$$

Beispiel 7.4: $y'' + \omega^2 y = \cos\omega t$, $\lambda_0 = i\omega$, $p(\lambda) = \lambda^2\omega^2$

ANSATZ: $y(t) = cte^{i\omega t}$

$$y(t) = t(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

2. Zusammenfassung

1 Sei $C^\infty(\mathbb{R})$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$). Sei $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ der Operator

$$Dy := y'$$

2 D ist linear.

$$\begin{aligned}
D(y_1 + y_2) &= Dy_1 + Dy_2 \\
D(\alpha y) &= \alpha Dy \qquad \alpha \in \mathbb{R}, y, y_1, y_2 \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

3 $Dy^k = y^{(k)}$

4 Sei $L : \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$Ly := D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y$$

5 Die Differentialgleichung lautet

$$Ly = 0$$

6 Der Raum der Lösungen

$$\mathcal{L} = \{y \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) \,|\, Ly = 0\}$$

ist ein $n-$dimensionaler Vektorraum

7 Eine Basis von $\mathcal{L}$ ist gegeben durch die Funktionen $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ wobei Y_j die Lösung der Differentialgleichung ist mit der Anfangsbedingung

$$Y_j^{(k)} = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = j \end{cases}$$

das heisst jede Lösung der Differentialgleichung lässt sich in der Form

$$y(t) = c_0 Y_0(t) + c_1 Y_1(t) + \cdots + c_{n-1}Y_{n-1}(t)$$

schreiben.

8 $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, p heisst charakteristisches Polynom der Differentialgleichung.

9 Die Funktion $y(t) = e^{\lambda t}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung genau dann, wenn $p(\lambda) = 0$

KAPITEL 8

Topologische Grundbegriffe

[V27-050402] $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_1^3 + e^x \cos x_1 \end{pmatrix}$$

Definition (Errinnerung): Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heisst *stetig an der Stelle* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\underbrace{|x - x_0|}_{\in \mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{\in \mathbb{R}^m} < \varepsilon$$

Dabei ist $|\xi|$, wobei $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, definiert als $\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

Diese Funktion ist nicht auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, deshalb nehmen wir eine Teilmenge:

$$\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 + x_2 \neq 0\}$$

und schreiben $f : \Omega \to \mathbb{R}$
Im folgenden werden wir die Unterscheidung von offenen, abgeschlossenen und kompakten Teilmengen diskutieren.

Definition: Eine Teilmenge $U \in \mathbb{R}^n$ heisst *offen*, wenn für jedes $x_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|x - x_0| < \varepsilon \qquad\qquad x \in U$$

Was anschaulich bedeutet, dass die Randmenge in U nicht enthalten ist. Beachte auch die Analogie zum offenen Itervall (a, b)

Bezeichnung: Sei $x_0 = (x_{0_1}, \ldots, x_{0_n}) \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Die Menge

$$B_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x - x_0| < \varepsilon\}$$

heisst *offener Ball vom Radius* ε *mit Zentrum* x_0

Bemerkung: $U \in \mathbb{R}^n$ ist offen genau dann, wenn gilt:

$$\forall \, x_0 \in U \quad \exists \, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \in U$$

Beispiel 8.1: (1) $U := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x > 0\}$, $\Rightarrow$ die Teilmenge ist offen.
(2) $U := B_\gamma(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$

Behauptung: $B_\gamma(x_0)$ ist offen.

Beweis: Sei $x_1 \in B_\gamma(x_0)$ und sei $\varepsilon := \gamma - |x_1 - x_0| > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} |x - x_1| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| &\leq |x - x_1| + |x_1 - x_0| \\ &\leq \varepsilon + |x_1 - x_0| = \gamma \qquad \square \end{aligned}$$

(3) $U := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x^2 - 7x_2x_3 + e^{x_3} < 5\}$. In einer *strikten Ungleichung*, die *stetig* ist, kann man sagen, dass die Teilmenge offen ist.
(4) $U := \{(0,1) \in \mathbb{R}^n\}$ ist nicht offen. Punkte sind nie offen, da $\varepsilon > 0$ sein muss.
(5) $[0,1) \subset \mathbb{R}$ ist nicht offen.

Lemma 25: Eigenschaften von offenen Mengen:
(i) $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sind offene Mengen ($\emptyset$, da gar kein Punkt enthalten.)
(ii) Wenn U, $V \in \mathbb{R}$ offene Mengen sind, dann ist auch $U \cap V$ offen.
(iii) Sei I eine Indexmenge* und $U_i \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge für jedes $i \in I$. Dann ist die Vereinigung $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ ebenfalls eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$

Beispiel 8.2: $U_k := B_{\gamma_k}(0)$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$U := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k = \{0\}$$

Beweis (Lemma 25): (i) trivial
(ii) Seien U_1, $U_2 \in \mathbb{R}^n$ offen. Sei $x_0 \in U_1 \cap U_2$.
$\Rightarrow\ \exists\, \varepsilon_1 > 0 : B_{\varepsilon_1}(x_0) \subset U_1$, $\exists\, \varepsilon_2 > 0 : B_{\varepsilon_2}(x_0) \subset U_2$. Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$
$\Rightarrow\ B_\varepsilon \subset B_{\varepsilon_1}(x_0)$, $B_\varepsilon \subset B_{\varepsilon_2}(x_0)$
$\Rightarrow\ B_\varepsilon(x_0) \subset B_{\varepsilon_1}(x_0) \cap B_{\varepsilon_2}(x_0) \subset U_1 \cap U_2$
(iii) $x_0 \in U = \bigcup_{i \in I}$,
$\Rightarrow\ \exists\, i \in I$ so dass $x_0 \in U_i$
$\Rightarrow\ \exists\, \varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(x_0) \subset U_i \subset U$

Definition: Eine Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^n$ heisst *abgeschlossen*, wenn sie folgende Eigenschaften hat: Falls $x_k \in F$ eine konvergente Folge ist, so gehört der Limes $x := \lim_{k\to\infty} x_k$ ebenfalls zu F

Beispiel 8.3: (1) $F : \{x_0\}$ ist abgeschlossen
(2) $F : \{x \in \mathbb{R}^n |\, |x - x_0| \leq \gamma\}$ ist abgeschlossen
(3) $F : \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1x_2 + e^{x_1} \sin x_2 \leq 253\}$ ist abgeschlossen
(4) $F : \{x \in \mathbb{R}^n |\, |x - x_0| \leq 1, x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ ist abgeschlossen
(5) $\emptyset$ ist sowohl offen, als auch abgeschlossen
(6) $F : [0,1) \subset \mathbb{R}$ ist weder abgeschlossen, noch offen

Lemma 26: Sei $U \in \mathbb{R}^n$ irgendeine Teilmenge. Dann gilt:

$$U \text{ ist offen } \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \backslash U \text{ ist abgeschlossen}$$

Beweis: „$\Rightarrow$" wir nehmen an, U sei offen. Wir müssen zeigen, dass $F := \mathbb{R}^n \backslash U$ abgeschlossen ist. Sei $x_k \in F$ eine konvergente Folge und $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_k$

Behauptung: $x_0 \in F$

Beweis: Angenommen, das Gegenteil ist der Fall: $x_0 \neq F$. $\Rightarrow x_0 \in U$, da U offen ist $\exists\, \varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(x_0) \subset U$

$\Rightarrow\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}, \forall\, k > k_0 : |x_{k_0} - x_0| < \varepsilon$
$\Rightarrow\ \forall\, k \geq k_0 : x_k \in B_\varepsilon(x_0) \subset U$
$\Rightarrow\ x_k \notin F, \forall\, k > k_0$ Widerspruch!

„$\Leftarrow$" Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und $U = \mathbb{R}^n \backslash F$. Zu zeigen: U ist offen. Sei $x_0 \in U$

Behauptung: $\exists\, \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x_0) \subset U$

Annahme: Die Behauptung ist falsch

Beweis: Das heisst, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, x \in B_\varepsilon(x_0)$, $x \notin U$

$\Rightarrow\ \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_k \in B_{1/k}(x_0)$, $x_k \notin U$
$\Rightarrow\ |x_k - x_0| < \frac{1}{k}$, $x_k \in F$

*Diese kann auch unendlich sein

$\Rightarrow$ $x_k \in F$, $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k \notin F$ Widerspruch!

Lemma 27: (i) $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen.

(ii) Wenn F_1, $F_2 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen sind, so ist auch $F_1 \cup F_2$ abgeschlossen

(iii) Sei I eine Indexmenge und $F_i \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen für jedes $i \in I$. Dann ist

$$F := \bigcap_{i=1} F_i$$

ebenfalls eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$

Beweis: *Siehe Lemma 25 und Lemma 26*

Satz 40: Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f := \Omega \to U$ eine Abbildung wobei $U \in \mathbb{R}^m$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) Falls $U \subset \mathbb{R}^m$ offen ist, so ist auch

$$f^{-1}(U) \ \textit{Urbild} \ = \{x \in \Omega | f(x) \in U\}$$

offen.

Beweis: „i) $\Rightarrow$ ii)“: Sei f stetig und $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Sei $x_0 \in f^{-1}(U)$

$\Rightarrow$ $x_0 \in \Omega$, $f(x_0) \in U$
$\Rightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon\big(f(x_0)\big) \subset U$
$\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ so dass $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ $|x - x_0| < \delta$
$\Rightarrow$ $x \in \Omega$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
$\Rightarrow$ $B_\delta(x_0) \subset \Omega$
$\Rightarrow$ $f\big(B_\delta(x_0)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x_0)\big) \subset U$
$\Rightarrow$ $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U)$
$\Rightarrow$ ist ein offene Teilmenge

„ii) $\Rightarrow$ i)“: Sei $x_0 \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$B_\varepsilon\big(f(x_0)\big) = \{y \in \mathbb{R}^m |\, |y - f(x_0)| < \varepsilon\}$$

offen.

$\Rightarrow$ $f^{-1}\big(B_\varepsilon(f(x_0))\big)$ ist offen
$\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ so dass $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}\big(B_\varepsilon(f(x_0))\big)$, das heisst $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Beispiel 8.4: $f(x) = x^2$

$$f^{-1}\big(\underbrace{(0,4)}_{U}\big) = (-2,2)\backslash\{0\}$$

$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{x}$

Beispiel 8.5: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > 0\}$ offen ist, ist auch $f^{-1}\big((0,\infty)\big)$ eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}$

Definition: Eine Teilmenge $K \in \mathbb{R}^n$ heisst *kompakt*, falls jede Folge $x_k \in K$ eine Teilfolge besitzt, die gegen ein Element von K konvergiert.

Beispiel 8.6: (1) $K := \{x \in \mathbb{R}^n |\, |x| \leq 1\}$ ist kompakt

(2) $K := \{x \subset \mathbb{R} | \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq 1\}$ ist kompakt

(3) $K := \mathbb{R}^n$ ist nicht kompakt

(4) $K := \emptyset$ ist kompakt

Definition: Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heisst *beschränkt*, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$|x| \leq C \qquad\qquad \forall\, x \in B$$

Satz 41: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Dann gilt:

$$K \text{ ist kompakt } \Leftrightarrow K \text{ ist abgeschlossen und beschränkt}$$

Beweis: K KOMPAKT $\Rightarrow K$ ABGESCHLOSSEN: Annahme: K ist nicht abgeschlossen.

$\Rightarrow$ Es gibt eine konvergente Folge $x_k \in K$, so dass $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k \notin K$
$\Rightarrow$ Jede Teilfolge von x_k konvergiert ebenfalls gegen x_0
$\Rightarrow$ K ist nicht abgeschlossen

K KOMPAKT $\Rightarrow K$ BESCHRÄNKT: Annahme: K ist nicht beschränkt.

$\Rightarrow$ Für jede natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ existiert ein Element $x_k \in K$, so dass $|x_k| > k$
$\Rightarrow$ Die Folge x_k hat keine konvergente Teilfolge
$\Rightarrow$ K ist nicht kompakt

K BESCHRÄNKT UND ABGESCHLOSSEN $\Rightarrow K$ KOMPAKT: Behauptung: Keine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.
[V28-080402] Sei K abgeschlossen und beschränkt. Sei $x_k \in K$ eine Folge.

$\Rightarrow \exists\, C > 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ |x_k| \leq C$
$\Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge x_{k_i}
$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} x_{k_i} \in K$

damit ist k kompakt.
Sei $x_k = (x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}) \in \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Folge, das heisst $\exists\, C > 0$ so dass $\forall\, k \in \mathbb{N}$

$$|x_k| = \sqrt{x_{k_1}^2 + \cdots + x_{k_n}^2} \leq C \Rightarrow |x_{k_1}| \leq C_1, |x_{k_2}| \leq C_2, \ldots, |x_{k_n}| \leq C_n$$

Der Satz von Bolzano-Weierstrass (*siehe Analysis I, Seite 37*) besagt:

$\Rightarrow \exists$ eine Teilfolge k_{i1}, so dass $x_{k_{i1}}$ konvergiert
$\Rightarrow \exists$ eine weitere Teilfolge k_{i2}, so dass $x_{k_{i1}}$ und $x_{k_{12}}$ konvergieren.
$\Rightarrow \exists$ eine weitere Teilfolge k_{ir}, so dass $x_{k_{ir}}$ konvergiert $(i \to \infty)$ für jedes $r = i, \ldots, n$
$\Rightarrow x_{k_i}$ konvergiert.

Satz 42: Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Sei weiter $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge. $\Rightarrow f(K)$ ist eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^m$

Beweis: Sei $y_k \in f(K)$ eine Folge. Wähle $x_k \in K$, so dass $f(x_k) = y_k$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge k_i, so dass x_{k_i} konvergiert und $x_0 = \lim_{i\to\infty} x_{k_i} \in K$
$\Rightarrow y_{k_i} = f(x_{k_i})$ konvergiert gegen $y_0 = f(x_0) \in f(K)$

Satz 43: Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge. Dann $\exists\, x_0 \in K$ so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad\qquad \forall\, x \in K$$

Beweis: $f(K)$ ist kompakt nach Satz 42. Nach Satz 41 folgt

$\Rightarrow f(K)$ ist abgeschlossen und beschränkt. Sei $y_0 := \sup f(K)$, $K \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists\, x_k \in K$ so dass $f(x_k) \to y_0$. K ist kompakt
$\Rightarrow \exists$ eine Teilfolge k_i, so dass $x_{k_i} \to x_0 \in K$. f ist stetig
$\Rightarrow f(x_0) = \lim_{i\to\infty} f(x_{k_i}) = y_0 = \sup f(K)$
$\Rightarrow f(x_0) \geq f(x), \forall\, x \in K$

BEMERKUNG: Die Begriffe *offen*, *abgeschlossen* und *kompakt* lassen sich auf Teilfolgen beliebiger mehrdimensionaler Räume übertragen. Alle Sätze und Lemmata (insbesondere Satz 41) gelten in beliebigen mehrdimensionalen Räumen.

1. Zusammenfassung

1 Eine Teilmenge heisst offen, wenn für jedes $x_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

2 Ein offener Ball vom Radius ε mit Zentrum x_0 wird geschrieben als

$$B_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x - x_0| < \varepsilon\}$$

3 U ist genau dann offen, wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon \ (x_O) \ \in \ U$.

4 Eine Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^n$ heisst abgeschlossen, wenn der Limes einer konvergente Folge $x_k \in F$ ebenfalls in F liegt.

5 Ist $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, dann ist $\mathbb{R}^m \backslash \{U\}$

6 Falls $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $U \in \mathbb{R}^m$ zwei offene Teilmengen und $f : \Omega \to U$ dann gilt

$$f \text{ ist stetig } \Leftrightarrow f^1(U) = \{x \in \Omega | f(x) \in U\} \text{ ist offen}$$

7 Eine Teilmenge $K \in \mathbb{R}^n$ heisst kompakt, falls jede Folge $x_k \in K$ eine Teilfolge besitzt, die gegen ein Element von k konvergiert.

8 Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heisst beschränkt, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass $|x| \leq C$

9 $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge $\Leftrightarrow$ K ist abgeschlossen und beschränkt.

10 Falls $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann existiert ein Punkt x_0, so dass für alle $x \in K$ gilt

$$f(x_0) \geq f(x)$$

KAPITEL 9

Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

1. Die partielle Ableitung

Wie leitet man $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^7 \cos(x_1 + x_3) e^{x_2}$ ab?

IDEE: Man hält zwei Variablen fest und leitet nach der dritten ab. Die drei Ableitungen für f lauten:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2^7 \cos(x_1 + x_3) e^{x_2} - x_1^3 x_2^7 \sin(x_1 + x_3) e^{x_2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 7 x_2^6 \cos(x_1 + x_3) e^{x_2} + x_1^3 x_2^7 \cos(x_1 + x_3) e^{x_2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = -x_1^3 x_2^7 \sin(x_1 + x_3) e^{x_2}$$

Definition: Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Die *partielle Ableitung*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

ist definiert als der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x)}{h}$$

falls dieser existiert. Eine weitere Schreibweise ist $D_i f(x)$.

BEMERKUNG: Sei $I := \{k \in \mathbb{R} | x + te_i \in \Omega\}$ ein offenes Intervall und

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sei $g : I \mapsto \mathbb{R}$, $g(t) := f(x + te_i)$. Dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0)$$

2. Tangentialebene

[V29-120402] $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y) = x^2 - y^2$. Gegeben sei ein Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$, daraus folgt, dass die Ableitung am Punkt eine Tangentialebene ist.

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& x_0 + t\xi \\ y &=& y_0 + t\eta \end{array}\right\} \text{nach vektorieller Betrachtung } \vec{r} = \vec{a} + t_1 \vec{r}_1 + t_2 \vec{r}_2$$

$$z = f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta)$$
$$E_0 := \left\{ (\xi, \eta, \vartheta) \,\middle|\, \vartheta := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta) \right\}$$

Beispiel 9.1: $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta) &= (x_0 + t\xi)^2 - (y_0 + t\eta)^2 \\ &= x_0^2 - y_0^2 + t(2x_0\xi - 2y_0\eta) + t^2(\xi^2 - \eta^2) \\ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta) &= 2x_0\xi - 2y_0\eta \\ E_0 &= \{\, (\xi, \eta, 2x_0\xi - 2y_0\eta) |\, \xi, \eta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Frage: Ist der Tangentialraum E_0 immer ein linearer Unterraum?

3. Die Richtungsableitung

Lemma 28:
- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen
- Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, so dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ auf ganz Ω existieren und dort stetig sind.
- Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, $\Rightarrow$ und die Funktion $t \mapsto f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta)$ ist stetig differenzierbar

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta \qquad (\triangle)$$

ist die Ableitung in beliebiger Richtung. *(Sogenannte Richtungsableitung).*

Beweis: Sei $I = \{t \in \mathbb{R} | (x_0 + t\xi, y_0 + t\eta) \in \Omega\}$. Dies ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ (nach Satz 40). Sei $g : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(t) := f(x_0 + t\xi, y_0 + t\eta)$$

Zu zeigen: g ist differenzierbar an der Stelle $t = 0$

$$\begin{aligned} \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \frac{f(x_0 + h\xi, y_0 + h\eta) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= \underbrace{\frac{f(x_0 + h\xi, y_0 + h\eta) - f(x_0, y_0 + h\eta)}{h}}_{(2)} + \underbrace{\frac{f(x_0, y_0 + h\eta) - f(x_0, \eta_0)}{h}}_{(1)} \end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h\eta) - f(x_0, y_0)\eta}{h\eta} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta \qquad (1)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h\xi, y_0 + h\eta) - f(x_0, y_0 + h\eta)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi \qquad (2)$$

Beweis (von 2):

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h\xi, y_0 + h\eta) - f(x_0, y_0 + h\eta)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x_0 + s\xi, y_0 + h\eta)\mathrm{d}s - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + s\xi, y_0 + h\eta)\xi\mathrm{d}s - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + s\xi, y_0 + h\eta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\xi\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} := \Omega$, $\Rightarrow$ ist stetig nach Voraussetzung: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\Rightarrow \exists\, \delta > 0\ \forall\, (x,y) \in \Omega$

$$\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} < \delta \Rightarrow \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x,y) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} f(x_0, y_0)\right| < \frac{\varepsilon}{|\xi|} \qquad (*)$$

Angenommen

$$0 < h < \frac{\delta}{\sqrt{|\xi|^2 + |\eta|^2}}$$

Dann gilt für $0 \leq s \leq h$

$$\sqrt{|s\xi|^2 + |h\eta|^2} < h\sqrt{|\xi|^2 + |\eta|^2} < \delta$$

das heisst $(*)$ gilt für $x = x_0 + s\xi$, $y = y_0 + h\eta$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + s\xi, y_0 + h\eta) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi\right| < \frac{\varepsilon}{|\xi|} \cdot |\xi| = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x_0 + h\xi, y_0 + h\eta) - f(x_0, y_0 + h\eta)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi\right|$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_0^h \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + s\xi, y_0 + h\eta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi\right| \mathrm{d}s \leq \varepsilon$$

Wir haben gezeigt, dass $(\triangle)$ gilt. $\square$

ALLGEMEIN: *Richtungsableitung* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \Omega$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$

Definition: Die Ableitung von f an der Stelle von x in Richtung ξ ist definiert als der Grenzwert

$$\mathrm{d}f(x)\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f} f(x + t\xi)\Big|_{t=0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h\xi) - f(x)}{h}$$

falls dieser existiert.

Beispiel 9.2: $\xi = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist die Richtungsableitung (in Richtung e_i) genau die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

$$\mathrm{d}f(x)e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$$

$$f(x + te_1) = f(x_1 + t_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Satz 44: Angenommen, alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existieren und sind stetig, $\Rightarrow$ Die Richtungsableitung von f existiert an jeder Stelle $x \in \Omega$ in jeder Richtung $\xi \in \mathbb{R}^n$, sie ist gegeben durch die Formel

$$\mathrm{d}f(x)\xi := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f} f(x + t\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\xi_i$$

Beweis: $m = 1$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Induktion über n:

$n = 2$: $\Rightarrow$ Lemma 28

$n \geq 3$: Annahme: Satz bewiesen für $n - 1$

$$\begin{aligned} g(s,t) &:= f(x_1 + s\xi_1, \dots, x_{n-1} + s\xi_{n-1}, x_n + t\xi_n \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(\dots)\xi_n && \text{nach Voraussetzung} \\ \frac{\partial g}{\partial s} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\dots)\xi_i && \text{nach Ind. Annahme} \end{aligned}$$

$$\overset{L28}{\Rightarrow} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+\lambda\xi)\Big|_{\lambda=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} g(\lambda,\lambda)\Big|_{\lambda=0}$$
$$= \frac{\partial y}{\partial s}(0,0) + \frac{\partial y}{\partial t}(0,0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\xi_1$$

Satz 45: [V30-160402] Sei$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Alle partiellen Ableitungen von f existieren und sind stetig auf Ω. $\Rightarrow$ Für $x \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ existieren die Richtungsableitungen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f(x+t\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_1 f_1(x+t\xi) \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_n f_n(x+t\xi) \end{pmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}}_{\text{Matrix der positiven Ableitungen, sog. Jacobimatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der Richtung der Ableitung}}$$

4. Jacobimatrix

Definition: Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, die im Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n)$ differenzierbar sei und die Komponenten $f_1, \ldots, f_m$ habe. Dann ist

$$Df(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

die *Jacobi Matrix* oder auch die *Funktionalmatrix* von f an der Stelle x. Die Jacobimatrix ist eindeutig bestimmt.

Bemerkungen:

(1) Teilweise wird $Df(x)$ auch mit $df(x)$ bezeichnet.
(2) Satz 45 sagt: falls die positiven Ableitungen von f stetig sind, so sind die Richtungsableitungen gegeben durch
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f(x+t\xi) = Df(x)\cdot\xi$$
(3) Wir bezeichnen die Menge der reellen Matrizen mit m Reihen und n Spalten mit $\mathbb{R}^{m\times n} \ni A$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Beispiel 9.3: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \\ e^{x_1}\cos x_2 \end{pmatrix}$$

Dann ist die Jacobimatrix

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \\ e^{x_1}\cos x_2 & -e^{x_1}\sin x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

wobei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

also folgt für die Richtungsableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(x+t\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ x_2\xi_1 + x_1\xi_2 \\ \xi_1 e^{x_1}\cos x_2 - \xi_2 e^{x_1}\sin x_2 \end{pmatrix}$$

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. f heisst *differenzierbar an der Stelle* $x \in \Omega$ falls es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gibt, so dass

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{|f(x+\xi) - f(x) - A\xi|}{|\xi|} = 0$$

Das bedeutet, der Differentialquotient konvergiert gegen A, das heisst $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$0 < |\xi| < \delta \Rightarrow \frac{|f(x+\xi) - f(x) - A\xi|}{|\xi|} < \varepsilon$$

Falls eine solche Matrix A existiert, so nennen wir sie die Ableitung von f an der Stelle x und benennen sie mit $Df(a) := A$

Bemerkung: Falls f differenzierbar ist an der Stelle x und $\xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0$ so gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{|\xi|\to 0} \frac{|f(x+t\xi) - f(x) - A\xi)|}{|\xi|} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{|f(x+t\xi) - f(x) - tA\xi)|}{|t|} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{|f(x+t\xi) - f(x)|}{t} - A\xi &= 0 \\ \Rightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{|f(x+t\xi) - f(x)|}{t} &= A\xi \end{aligned}$$

Diese Überlegung zeigt: Falls f differenzierbar ist an der Stelle x so gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+t\xi)\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\xi) - f(x)}{t} = Df(x)\cdot\xi$$

Bemerkung: Falls f an der Stelle x differenzierbar ist, so existieren die Richtungsableitungen an der Stelle x und die Ableitung

$$\mathbb{R}^n \to \xi \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+t\xi)\bigg|_{t=0} \in \mathbb{R}^m$$

ist linear. Falls die Richtungsableitungen existieren, muss die Funktion noch nicht differenzierbar sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 9.4: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

siehe Übung

- Alle Richtungsableitungen von f existieren an der Stelle $x = 0$
- f ist *nicht* differenzierbar an der Stelle $x = 0$

Satz 46: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$, so dass alle partiellen Ableitungen von f existieren und stetig sind auf ganz Ω.
$\Rightarrow$ f ist an jeder Stelle $x \in \Omega$ differenzierbar und die Ableitung von f an der Stelle x ist die Jacobimatrix $Df(x)$

5. Norm einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Norm von A ist definiert durch die Formel

$$|A| := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Eigenschaften der Norm:

Lemma 29: (i) $|A| \geq 0 \qquad \forall\, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
(ii) $|A| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ *Nullmatrix*
(iii) $|A+B| \leq |A| + |B| \qquad \forall\, A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *Dreiecksungleichung*
(iv) $|A\xi| \leq ||A|\,|\xi|| \qquad \forall\, A, B \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$

Beweis (von (iv)): Beweis mittels *Cauchy-Schwarz Ungleichung*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a_1 & = & (a_{11}, \ldots, a_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_m & = & (a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \end{matrix}$$

$$A\xi = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}\xi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1, \xi\rangle \\ \vdots \\ \langle a_m, \xi\rangle \end{pmatrix}$$

Ausserdem gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung $|\langle a_1, \xi\rangle| \leq |a_i| \cdot |\xi|$

$$\begin{aligned} |A\xi|^2 &= \left| \begin{pmatrix} \langle a_1, \xi\rangle \\ \vdots \\ \langle a_m, \xi\rangle \end{pmatrix} \right|^2 = \sum_{i=1}^m |\langle a_i, \xi\rangle|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^2\right) |\xi|^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}\right) |\xi|^2 = |A|^2 \cdot |\xi|^2 \qquad \square \end{aligned}$$

Beweis (von Satz 46): Sei $Df(x)$ die Jacobi Matrix von f an der Stelle $x \in \Omega$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Zu zeigen ist: Die Matrix $A := Df(x)$ erfüllt die Bedingung in der Definition von differenzierbar, das heisst

$$\frac{|f(x+\xi) - f(x) - Df(x)\xi|}{|\xi|} = 0$$

Nach Voraussetzung sind die partiellen Ableitungen von f stetig.
$\Rightarrow$ die Abbildung von $\Omega \mapsto \mathbb{R}^{m\times n} : x \mapsto Df(x)$ ist stetig.

$\Rightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, so dass $|\xi| < \delta \Rightarrow |Df(x+\xi) - Df(x)| < \varepsilon$. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass $|\xi| < \delta$

Wir wissen (Satz 44): Die Funktion $t \mapsto f(x + t\xi)$ ist differenzierbar und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+t\xi) = Df(x+t\xi)\cdot\xi \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |f(x+\xi) - f(x) - Df(x)\xi| &= \left|\int_0^1 Df(x+t\xi)\cdot\xi \mathrm{d}t - Df(x)\xi\right| \\
&= \left|\int_0^1 \big(Df(x+t\xi) - Df(x)\big)\xi \mathrm{d}t\right| \\
&\le \int_0^1 \left|\big(Df(x+t\xi) - Df(x)\big)\xi\right| \mathrm{d}t \\
&\le \int_0^1 \underbrace{|Df(x+t\xi) - Df(x)|}_{<\varepsilon} \cdot |\xi| \,\mathrm{d}t \le \varepsilon\, |\xi|
\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass für jedes $x \in \Omega$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $0 < |\varepsilon| < \delta$

$$\frac{|f(x+\xi) - f(x) - Df(x)\xi|}{|\xi|} < \varepsilon$$

das heisst, f ist differenzierbar an der Stelle x

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst *stetig differenzierbar*, falls alle partiellen Ableitungen auf ganz Ω existieren und dort stetig sind.

Beispiel 9.5: [V31-190402]

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

f ist stetig an der Stelle $x = y = 0$ und differenzierbar.

$$\frac{|x^3|}{x^2+y^2} \le |x|$$

Partielle Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{\xi\to 0} \frac{f(\xi,0) - f(0,0)}{\xi} = \lim_{\xi\to 0} \frac{\xi^3}{\xi(\xi^2+0^2)} = 1 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{\eta\to 0} \frac{f(0,\eta) - f(0,0)}{\eta} = 0
\end{aligned}$$

Richtungs Ableitung:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(t\xi, t\eta) = \frac{(t\xi)^3}{(t\xi)^2 + (t\eta)^2} = t\frac{\xi^3}{\xi^2+\eta^2}$$

ERRINNERUNG: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar an der Stelle $(0,0)$, wenn es eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ gibt, so dass

$$\begin{aligned}
\lim_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\to 0} \frac{\left|f(\xi,\eta) - f(0,0) - A\left(\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right)\right|}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} &= 0\\
\lim_{t\to 0} \frac{|f(t\xi,t\eta) - f(0,0) - t(a\xi+b\eta)|}{|t|} &= 0\\
\lim_{t\to 0} \left|\frac{f(t\xi,t\eta) - f(0,0)}{t} - a\xi - b\eta\right| &= 0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t\xi,t\eta)\bigg|_{t=0} &= a\xi + b\eta
\end{aligned}$$

Die Ableitung an $(0,0)$ ist vorhanden, sie ist aber nicht linear. Das heisst, f ist nicht differenzierbar an der Stelle $(0,0)$. Ist das ein Widerspruch zu unseren Sätzen?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - x^3 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1, \quad y \neq 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ ist nicht stetig $\Rightarrow$ der Satz ist in Ordnung.

6. Die Kettenregel

Satz 47 (Kettenregel): $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \mapsto \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f(U) \subset V$, $g : V \to \mathbb{R}^l$, $g \circ f \to \mathbb{R}^l$. f sei differenzierbar an der Stelle x_0, g sei differenzierbar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$. $\Rightarrow g \circ f$ ist differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$D(g\circ f)(x_0) = Dg\big(f(x_0)\big)\cdot Df(x_0)$$

Dies ist einleuchtend da:

$$Df(x_0) \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad Dg(y_0) \in \mathbb{R}^{l\times m}$$

Beweis: 1. WÄHLE EINE ZAHL $\rho > 0$: so dass $0 < |\eta| < \rho$ daraus folgt

$$\frac{|g(y_0+\eta) - g(y_0) - Dg(y_0)\eta|}{|\eta|} < \frac{\varepsilon}{2(1 + D(f\,|x_0|)}$$

$\eta \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n = (x_1, \dots, x_m)$

2. WÄHLE $\delta > 0$: so dass $\xi \in \mathbb{R}^n$, $0 < |\xi| < \delta \Rightarrow$

$$\frac{|f(x_0+\xi) - f(x_0) - Df(x_0)\xi|}{|\xi|} < \frac{\varepsilon}{2(1+|Dg(y_0)|)}$$

und $\big(1 + |Df(x_0)|\,\big)\delta < \rho$.
Sei $0 < |\xi| < \delta$, daraus folgt

$$\begin{aligned}
|f(x_0+\xi) - f(x_0)| &\leq |f(x_0+\xi) - f(x_0) - Df(x_0)\xi| + |Df(x_0)\xi|\\
&\leq \frac{\varepsilon\,|\xi|}{2(1+|Df(x_0)|)} + |Df(x_0)|\,|\xi|\\
&\leq |\xi|\,(1 + |Df(x_0)|)\delta\\
&< \rho
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
&\left|g\big(f(x_0+\xi)\big)-g\big(f(x_0)\big)-Dg(y_0)\cdot Df(x_0)\xi\right| \\
&\quad\le \left|g\big(f(x_0+\xi)\big)-g\big(f(x_0)\big)-Dg(y_0)\big(f(x_0+\xi)-f(x_0)\big)\right| \\
&\qquad + \left|Dg(y_0)\big(f(x_0+\xi)-f(x_0)-Df(x_0)\xi\big)\right| \\
&\quad< \frac{\varepsilon\,|f(x_0+\xi)-f(x_0)|}{2(1+|Df(x_0)|)}+|Dg(y_0)|\,\frac{\varepsilon\,|\xi|}{2(1+|Dg(y_0)|} \\
&\quad< \frac{\varepsilon}{2}\,|\xi|+\frac{\varepsilon}{2}\,|\xi|=\varepsilon\,|\xi|
\end{aligned}$$

Beispiel 9.6: Sei $f:\Omega\mapsto\mathbb{R}^m$ eine Funktion, wobei $\Omega\in\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist. Ferner sei $\gamma:\mathbb{R}\mapsto\Omega$ ein Funktion, wobei

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \vdots\\ \gamma_n(t)\end{pmatrix}$$

Wir definieren

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\circ\gamma(t)=Df\big(\gamma(t)\big)\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

Setzen wir $\gamma(t)=x_0+t\xi$, das heisst $\dot\gamma(t)=\xi\in\mathbb{R}^n$, so erhalten wir mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x_0+t\xi)=Df(x_0+t\xi)\xi$$

die *Richtungsableitung*

Beispiel 9.7: Seien $g:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ und $f:(0,\infty)\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^2$

$$g(x,y):=e^{(x^2+y^2)\frac{1}{2}} \qquad\qquad f(\gamma,\theta):=(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)$$

zwei Funktionen. Wir erhalten für die Verknüpfung:

$$g\circ f(\gamma,\theta)=e^{(\gamma\cos^2\theta+\gamma\sin^2\theta)\frac{1}{2}}=e^{\gamma^2/2}$$

Und für die Ableitung der Verknüpfung

$$\begin{aligned}
D\big(g\circ f(\gamma,\theta)\big)&=\left(\frac{\partial g\circ f}{\partial\gamma}(\gamma,\theta),\frac{\partial g\circ f}{\partial\theta}(\gamma,\theta)\right)\\
&=\left(\gamma e^{\gamma^2/2},0\right)
\end{aligned}$$

Wir wollen nun die Kettenregel nachweisen, dazu berechnen wir die Ableitungen einzeln:

$$Df(\gamma,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\gamma\sin\theta\\ \sin\theta & \gamma\cos\theta\end{pmatrix} \qquad\qquad Dg(x,y)=\left(xe^{(x^2+y^2)/2},ye^{(x^2+y^2)/2}\right)$$

Ersetzen wir $x=\gamma\cos\theta$, $y=\gamma\sin\theta$ und $\gamma=x^2+y^2$ und erhalten

$$=e^{\gamma^2/2}\,(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)$$

Wenden wir die Kettenregel (47), $D(g\circ f)(x_0)=Dg\big(f(x_0)\big)\cdot Df(x_0)$, an, so erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
Dg(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)Df(\gamma,\theta)&=e^{\gamma^2/2}\,(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\gamma\sin\theta\\ \sin\theta & \gamma\cos\theta\end{pmatrix}\\
&=e^{\gamma^2/2}(\gamma,0)
\end{aligned}$$

das gewünschte Resultat.

7. Höhere partielle Ableitungen

Sei $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion, das heisst

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$$

ist stetig für $i = 1, \ldots, n$

Definition: f heisst zweimal stetig differenzierbar, wenn f stetig differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ebenfalls stetig differenzierbar ist für $i = 1, \ldots, n$.
f ist C^1 bedeutet, f ist stetig differenzierbar, f ist C^2 bedeutet, f ist zweimal stetig differenzierbar, etc.

Beispiel 9.8: Sei $f : (x, y) \ni \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 y + \cos x \cdot e^{x+y}$ eine Funktion. Die ersten partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + \cos x \cdot e^{x+y} - \sin x e^{x+y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + \cos x \cdot e^{x+y}$$

Die zweiten partiellen Ableitungen sind:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + (\cos x - \sin x)e^{x+y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - \sin x \cdot e^{x+y} + \cos x \cdot e^{x+y}$$

Satz 48: Sei $\Omega \in \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \qquad \forall\, x_i, x_j \in \Omega, \forall\, i, j$$

Das heisst, die partielle Ableitung ist unabhängig von der Reihenfolge.

Sei $f : (x, y) \ni \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Was ist nun die zweimalige partielle Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\xi \to 0} \frac{f(x + \xi, y) - f(x, y)}{\xi}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y + \eta) = \lim_{\xi \to 0} \frac{f(x + \xi, y + \eta) - f(x, y + \eta)}{\xi}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y + \eta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)$$
$$= \lim_{\eta \to 0} \lim_{\xi \to 0} \frac{f(x + \xi, y + \eta) - f(x, y + \eta) - f(x + \xi, \eta) - f(x, y)}{\xi \eta}$$

Beispiel 9.9: Nehmen wir Beispiel 9.8

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + \cos x e^{x+y}$$

Dann erhalten wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + (\cos x - \sin x)e^{x+y}$$

[V32-220402] Sei $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Wir wollen zweigen, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

gilt. In der Vorlesung 31 haben wir erhalten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{\eta \to 0} \lim_{\xi \to 0} \frac{(x+\xi, y+\eta) - f(x+\xi, y) - f(x, y+\eta) + f(x,y)}{\xi\eta}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{\xi \to 0} \lim_{\eta \to 0} \frac{(x+\xi, y+\eta) - f(x+\xi, y) - f(x, y+\eta) + f(x,y)}{\xi\eta}$$

Im ersten Fall geht ξ schneller gegen 0 als η, im zweiten gerade umgekehrt.

Behauptung: Sei

$$a := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$

$$0 < |\xi| + |\eta| < \delta \Rightarrow \left| \frac{(x+\xi, y+\eta) - f(x+\xi, y) - f(x, y+\eta) + f(x,y)}{\xi\eta} - a \right| < \varepsilon$$

wobei $\eta \neq 0, \xi \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle nun ein $\delta > 0$, so dass wenn $|\xi| + |\eta| < \delta$ folgt:

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\xi, y+\eta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \right| < \varepsilon$$

Der Ausdruck entspricht der Norm mit Koordinaten ξ und η.

$$\overbrace{f(x+\xi, y+\eta)}^{(1)} - \overbrace{f(x+\xi, y)}^{(2)} - \overbrace{f(x, y+\eta)}^{(3)} + \overbrace{f(x,y)}^{(4)}$$

Durch benutzen des Fundamentalsatz der Differential und Integralrechnung erhält man

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \big(\underbrace{f(x+s\xi, y+\eta)}_{(1)\,+\,(4)\text{ Glied}} - \underbrace{f(x+s\xi, y)}_{(2)\,+\,(3)\text{ Glied}} \big) \mathrm{d}s$$

s ist nur im ersten Glied, das zweite wird festgehalten. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$= \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x+s\xi, y+\eta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x+s\xi, y) \right) \mathrm{d}s$$

Durch nochmaliges Anwenden des Fundamentalsatzes kommen wir zu

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x+s\xi, y+t\eta)\xi \right) \mathrm{d}t\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+s\xi, y+t\eta)\xi\eta \mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

Daraus folgt:

$$\left| \frac{(x+\xi, y+\eta) - f(x+\xi, y) - f(x, y+\eta) + f(x,y)}{\xi\eta} - a \right|$$
$$\leq \left| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+s\xi, y+t\eta) \mathrm{d}t\mathrm{d}s - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \right|$$

Beide Integrale haben in die s und die t Richtung die selbe Länge

$$= \left| \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+s\xi, y+t\eta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \right) \mathrm{d}t\mathrm{d}s \right|$$
$$\leq \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+s\xi, y+t\eta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \right|}_{<\varepsilon \text{ solange } |\xi|+|\eta|<\delta}$$

da s und $t < 1$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{\int_0^1 \varepsilon \mathrm{d}t}_{\varepsilon} \, \mathrm{d}s$$

$$= \varepsilon$$

Beispiel 9.10: Dass die Stetigkeit eine zwingende Voraussetzung für die Vertauschbarkeit ist, zeigt dieses Beispiel

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existieren überall, sind aber nicht stetig an der Stelle $x = y = 0$ Ausserdem gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

Bemerkung:Wenn wir zwei partielle Ableitungen vertauschen können, können wir durch beliebig langes kommutieren auch die Reihenfolge mehrerer Ableitungen vertauschen, sofern diese stetig sind.

Definition: $\Omega \in \mathbb{R}^n$ sei eine offene Teilmenge und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $I \in \mathbb{N}$. f heisst l *mal stetig differenzierbar* falls alle partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung l existieren und stetig sind.

Notation: $C^l(\Omega, \mathbb{R}^m := \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m\}$. f ist l mal stetig differenzierbar, $f \in C^l$.
Höhere partielle Ableitungen haben folgende Form: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \geq 0$

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \partial {x_n}^{\alpha_n}}(x)$$

Da es nicht auf die Reihenfolge ankommt, sondern nur auf die Anzahl Ableitungen, können wir alle höheren Ableitungen so schreiben.

8. Taylorsche Satz

Beispiel 9.11: $f(x,y) = x^k y^l$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = kx^{k-1}y^l$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = k(k-1)x^{k-2}y^l$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} = k!y^l$$

Nun hängt die Ableitung nicht mehr von x ab und würde im nächsten Schritt 0

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y}(x,y) = k!ly^{l-1}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^k}(x,y) = k!l!$$

Allgemein ist die höchste Ableitung von Potenzfuktionen, die nicht 0 ist:

$$\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial {x_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial {x_n}^{k_n}}(x) = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$$

Wollen wir aus dieser Ableitung die ursprüngliche Funktion rekonstruieren, so wissen wir

$$f(x_1,\dots,x_n) = \frac{\partial^{(k_1,k_2,\dots,k_n)} f(0)}{k_1!k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}({x_1}^{k_1},\dots,{x_n}^{k_n}) \qquad (\triangle)$$

Sei f ein Polynom in n Variablen vom Grade l. Das heisst, f ist eine Summe von Thermen der Form ($\triangle$), wobei der höchste die Ordnung l hat, das heisst:

$$\begin{aligned} f(x) = c_0 &+ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ &+ c_{1,1}x_1^2 + c_{1,2}x_1x_2 + \dots + c_{n,n}x_n^2 \\ &+ c_{1,1,1}x_1^3 + \dots + c_{n,n,n}x_n^3 \cdots \end{aligned}$$

Um diesen langen Therm abzukürzen, schreiben wir $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ wobei $a_j \in \mathbb{Z}$, $a_j \geq 0$ und definieren:

$$x^\alpha := {x_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot {x_n}^{\alpha_n} \qquad\qquad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

Mit dieser Notation hat ein Polynom vom Grade l mit n Variablen die Form:

$$f(x) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\leq l}} c_\alpha x^\alpha \qquad (*)$$

Was sind die Koeffizienten c_α, wenn wir die partielle Ableitung ($\triangle$) kennen? $k_1 + \dots + k_n \leq l$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{\partial^{(k_1,k_2,\dots,k_n)} f(0)}{\partial {x_1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot\partial {x_n}^{k_n}} &= k_1!\cdot\ldots\cdot k_n! c_{k_1}\cdot\ldots\cdot c_{k_n} \\ \Rightarrow \quad c_\alpha &= \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!} \end{aligned}$$

Falls f die Form ($*$) hat, so gilt:

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\leq l} \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!} x^\alpha$$

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ l mal stetig differenzierbar. Sei $x \in \Omega$. Der Taylorpolynom von f an der Stelle x mit Ordnung l ist:

$$\left(T_x^l f\right)(\xi) := \sum_{|\alpha|\leq l} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!}\xi^\alpha$$

Bemerkung: Falls f ein Polynom der Ordnung l ist, so gilt

$$f(x+\xi) = \left(T_x^l f\right)(\xi)$$

Beispiel 9.12: $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_1^7x_2^3x_3$

Satz 49: Sei $f \in C^{l+1}(\Omega,\mathbb{R}^m)$, $x + t\xi \in \Omega$, $\forall\, t \in \{0,1\}$.

$$f(x+\xi) - \sum_{|\alpha|\leq l} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!}\xi^\alpha = \int_0^1 (1-t)^l \sum_{|\alpha|\leq l} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!}(x+t\xi)\xi^\alpha \mathrm{d}t$$

Bemerkung: Wenn f ein Polynom der Ordnung l ist, dann ist jede Ableitung grösser $l+1$ gleich 0, deshalb macht der Ausdruck Sinn.

Beweis: Ist recht einfach da:

(1) Wenn die geltende Dimension 1 ist, dann gilt Lemma 25
(2) Wenn wir die Richtungsableitung betrachten, erhalten wir die Formel in Lemma 26 Seite 107.

Lemma 25, Seite 107, liefert: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x+\xi) = \sum_{k=0}^{l} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\xi^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{l!} f^{(l-1)}(x+t\xi)\xi^l \mathrm{d}t$$

Lemma 26 liefert: $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^l$. $\Rightarrow \forall\, k \in \{0,1,\dots,l\}$ gilt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0} f(x+t\xi) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!}\partial^\alpha f(x)\xi^\alpha$$

Wenn $k = 1$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x+t\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\xi$$

Das heisst, für $k = 1$ ist Lemma 26 erfüllt. Wir nehmen also an, der Satz gilt für $k-1$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0} f(x+t\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{|\alpha|=k-1} \frac{(k-1)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!}\partial^\alpha f(x)\xi^\alpha$$

Durch mehrmaliges ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned} &= \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{(k-1)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\partial^\alpha f(x)\xi^\alpha\xi_\nu \\ &= \sum_{|\alpha|=k-1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n-1)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!}\partial^{\alpha+e_\nu} f(x)\xi^{\alpha+e_\nu} \end{aligned}$$

Dabei gilt: $e_\nu = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$

$$\beta = (\beta - e_\nu) + e_\nu \frac{k!}{\beta_1! \cdot \ldots \cdot \beta_n!} \quad = \frac{(k-1)!}{(\beta_1-1)!\beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_n} + \dots + \frac{(k-1)!}{\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1}(\beta_n-1)!}$$

Es gilt also:

$$\sum_{|\alpha|=k-1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n-1)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!}\partial^{\alpha+e_\nu} f(x)\xi^{\alpha+e_\nu} = \sum \frac{k!}{\beta_1! \cdot \ldots \cdot \beta_n!}$$

und

$$|\beta| = n\partial^\beta f(x)\xi^\beta$$

Satz 50 (Taylorreihe): [V33-260402] Sei $f \in \mathbb{C}^{l+1}$, $(\Omega, \mathbb{R}^m)$. $x + t\xi \in \Omega\ \forall\, t \in (0,1)$, $\Rightarrow$:

$$\begin{aligned} f(x+\xi) &- \sum_{|\alpha|\le l} \frac{1}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!}\partial^\alpha f(x)\cdot\xi^x \\ &= \int_0^1 (l+1)(1-t)^l \cdot \sum_{|\alpha|=l+1} \frac{1}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!}\partial^\alpha f(x+t\xi)\xi^\alpha \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir die zwei folgenden Lemmata.

Lemma 30: Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(x+t\xi) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!}\partial^\alpha f(x)\xi^\alpha$$

Lemma 31: Wir setzen die Dimension $n = 1$. Sei $C^{l+1} \ni u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt

$$u(y) - \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} u^{(k)}(0) \cdot y^k = \int_0^1 \frac{(1-t)^l}{l!} \cdot u^{l+1}(ty) \cdot y^{l+1} \mathrm{d}t \qquad (*)$$

Dies ist ein Spezialfall der Taylorreihe für den Fall, dass die Dimension 1 ist.

Beweis (Satz 50): Wie folgt nun der Satz aus den Lemmata 30 und 31? Um diese zu verwenden, sei $u(t) := f(x + t\xi)$ und $y = x + t\xi$, dann gilt nämlich:

$$f(x+\xi) - \sum_{|\alpha| \leq l} \frac{1}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha = \underbrace{f(x+\xi)}_{u(1)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{l} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha}_{\frac{1}{k} u^{(k)}(0)}$$

Nach Lemma 30

$$= u(1) - \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} u^{(k)}(0)$$

Nun sehen wir uns Lemma 31 an und setzen $y = 1$

$$= \int_0^1 \frac{(1-t)^l}{l!} u^{(l+1)}(t) \mathrm{d}t$$

Lemma 30 für $k = l + 1$ liefert

$$= \int_0^1 \frac{(1-t)^l}{l!} \cdot \sum_{|\alpha|=l+1} \frac{(l+1)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \partial^\alpha \cdot f(x + t\xi) \xi^\alpha \mathrm{d}t$$

Mit dem Rauskürzen von $l!$ haben wir den Satz bewiesen. Uns bleibt nun noch, die Lemmata 30 und 31 zu beweisen.

Beweis (Lemma 30): Für $k = 1$ gilt

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x + t\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial t}{\partial x_i}(x) \xi_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha$$

Wobei gilt $\xi^\alpha = {\xi_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {\xi_n}^{\alpha_n}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $|\alpha| = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = e_\nu$. Daraus folgt:

$$\partial^\alpha f(x) = \partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial {x_n}^{\alpha_n}}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x)$$

Die ursprüngliche Rechnung setzt sich also wie folgt fort:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x + t\xi) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{1!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha$$

Mit Hilfe der Induktion zeigen wir nun, dass Lemma 30 auch für $k \geq 2$ gilt. Dazu nehmen wir an, es sei für $k - 1$ bewiesen.

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0} f(x + t\xi) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x + t\xi) \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}} f(x + t\xi)$$
$$= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{(k-1)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \partial^\alpha f(x + t\xi) \xi^\alpha$$

x in Richtung von ξ abgeleitet

$$= \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{(k-1)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \partial^\alpha f(x) \right) \xi \xi^\alpha$$

$$= \sum_{|\alpha|=k-1} \sum_{\nu=1}^{l} \frac{(k-1)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \partial^{\alpha+e_\nu} f(x) \xi$$

Nun gilt aber

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad e_\nu = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

$$\alpha + e_\nu = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l + 1, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_n)$$

Aus $\partial^{\alpha+e_\nu}$ können wir verschiedene β konstruieren, z.B.

$$\begin{array}{lllllll} \beta_1 & = & (3,7,4,8,1) & = & \alpha_1 + e_1 & = & (4,7,4,8,1) \\ \beta_3 & = & (4,7,3,8,1) & = & \alpha_3 + e_2 & = & (4,7,4,8,1) \end{array}$$

Oder allgemein

$$\begin{aligned} \beta &= \underbrace{(\beta_1, \ldots, \beta_l, \ldots, \beta_n)}_{\alpha_l} + \underbrace{(0, \ldots, 1, \ldots, 0)}_{e_l} \\ &= \underbrace{(\beta - e_\nu)}_{\alpha} + e_\nu \end{aligned}$$

Die ursprüngliche Rechnung fortgesetzt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0} f(x + t\xi) = \sum_{|\beta|=k} \left(\sum_{\alpha+e_\nu=\beta} \frac{(k-1)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \right) \partial^\alpha f(x) \xi^\beta$$

Wir müssen nun zeigen:

$$\sum_{\alpha+e_\nu=\beta} \frac{(k-1)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} = \frac{k!}{\beta_1! \cdot \ldots \cdot \beta_n!}$$

Dann gilt

$$= \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta_1! \cdot \ldots \cdot \beta_n!} \partial^\beta f(x) \xi^\beta$$

Wir zeigen also $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$,...

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha+e_\nu=\beta} \frac{(k-1)!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} &= \frac{(k-1)!}{(\beta_1-1)!\beta_2! \cdot \ldots \cdot \beta_n!} + \frac{(k-1)!}{\beta_1!(\beta_2-1)! \cdot \ldots \cdot \beta_n!} + \cdots + \frac{(k-1)!}{\beta_1! \cdot \ldots \cdot (\beta_n-1)!} \\ &= \frac{(k-1)!}{\beta_1! \cdot \ldots \cdot \beta_n!} \left(\underbrace{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}_{k} \right) \\ &= \frac{k!}{\beta_1! \cdot \ldots \cdot \beta_n!} \end{aligned}$$

Beweis (Lemma 31): Für den Fall $l = 1$:

$$\begin{aligned} u(y) - u(0) &= \int_0^1 u'(ty) y \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(ty) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Fundamentalsatz der Integral- und Differenzialrechnung für $l = 1$

$$\begin{aligned}
u(y) - u(0) - u'(0)y &= \int_0^1 \big(u'(ty) - u'(0)\big) \cdot \mathrm{d}t \cdot y \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u'(sy) \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \cdot y \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} (sy) y^2 \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Wir sehen uns das Gebiet an, $0 < s \leq t \leq 1$ Der Satz von Fubiny, siehe 20 Seite 165, liefert folgenden Satz

$$\int_0^1 \int_0^{t=1} \ldots \mathrm{d}s \mathrm{d}t = \int_0^1 \int_s^{t=1} \ldots \mathrm{d}t \mathrm{d}s$$

Also gilt

$$u(y) - u(0) - u'(0)y = \int_0^1 (1-s) u''(sy) y^2 \mathrm{d}s$$

Um die Taylorreihe besser zu verstehen, betrachten wir nur ξ^α. Es gilt

$$\int_0^1 (l+1)(1-t)^l \sum_{|\alpha| = l+1} \frac{1}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \partial^\alpha f(x + t\xi) \xi^\alpha \mathrm{d}t \leq |\xi|^{l+1}$$

Korollar 17: $f \in C^{l+1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Sei $x \in \Omega$, $\nu > 0$, dann gilt

$$\overline{B}_\nu := \{ y \in \mathbb{R}^n | (y - x) \leq r \} \subset \Omega$$

$\Rightarrow \exists\, c > 0 \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \ |\xi| \leq r$

$$\left| f(x+\xi) - \sum_{|\alpha| \leq l} \frac{1}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha \right| \leq c (\xi)^{l+1}$$

Wähle $c := \sup_{y \in B_\nu(x)}$

$$\sum_{|\alpha| \leq l+1} \frac{1}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \left| \partial^\alpha f(y) \right|_{\mathbb{R}^n} < \infty$$

$$\begin{aligned}
|\xi^\alpha| &= |{\xi_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {\xi_n}^{\alpha_n}| \\
&\leq |\xi_1|_1^\alpha \cdot \ldots \cdot |\xi_n|^{\alpha_n} \\
&\leq |\xi|^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |\xi|^{\alpha_n} \\
&\leq |\xi|^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \\
&= |\xi|^{l+1}
\end{aligned}$$

Da Satz 50 gilt:

$$\begin{aligned}
LS &\leq \int_0^1 (l+1)(1-t)^l c \, |\xi|^{l+1} \, \mathrm{d}t \\
&= c \, |\xi|^{l+1}
\end{aligned}$$

9. Taylorpolynom der Ordnung 2

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$

$$(T_x^2 f)(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{1}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha$$

$\boxed{|\alpha| = 0}$

$$= f(x)$$

$\boxed{|\alpha| = 1}$

$$= f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \xi_i$$

$\boxed{|\alpha| = 2}$ Für das letzte Glied existieren zwei Fälle, $\alpha_i = 2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\xi_i + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)\xi_i^2$$

und $\alpha = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, $\alpha_i = 1$,$\alpha_j = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1!}1!\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\xi_i\xi_j &= f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\xi_i + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)\xi^2 + \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\xi \\
&= f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\xi_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\xi_i\xi_j \\
(T_x^2 f)(\xi) &= f(x)\mathrm{d}f(x)\xi + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(x)(\xi, \xi)
\end{aligned}$$

Wir haben

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\xi_i\xi_j = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(x)(\xi, \xi)$$

definiert. Aus dem Korollar folgt:

$$\begin{array}{lllrll}
l & = & 0 & |f(x+\xi) - f(x)| & \leq & c\,|\xi| \quad f \in C^1 \\
l & = & 1 & |f(x+\xi) - f(x) - \mathrm{d}f(x)\xi| & \leq & c\,|\xi|^2 \quad f \in C^2 \\
l & = & 2 & \left| f(x+\xi) - f(x) - \mathrm{d}f(x)\xi - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(x)(\xi,\xi) \right| & \leq & c\,|\xi|^3 \quad f \in C^3
\end{array}$$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \in \mathbb{R} \qquad\qquad i, j = 1, \ldots, n$$

10. Die Hessesche Normalform

Die Hessesche Normalform wird definiert als:

$$\mathrm{d}^2 f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist symmetrisch und in $\mathbb{R}^{n \times n}$. Wir schreiben

$$\left\langle \xi, \mathrm{d}^2 f(x)\xi \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\xi_i\xi_j$$

11. Extremalaufgaben

[V34-290402] Sei $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}$ eine Funktion $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Dann ist $x = 0$ ein globales Minimum von f, denn $f(x) \geq f(0)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt $x \in \Omega$ heisst *lokales Minimum von* f, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$

$$|y - x| < \varepsilon \Rightarrow y \in \Omega \text{ und } f(y) \geq f(x)$$

Beispiel 9.13: Die Definition lässt sich auch schreiben als $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y - x| < \varepsilon\}$ daraus folgt $B_\varepsilon(x) \in \Omega$, $\min_{B_\varepsilon(x)} = f(x)$

Satz 51: Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $x \in \Omega$ eine lokales Minimum von f, daraus folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \qquad\qquad i = 1,\ldots,n$$

das heisst

$$df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = 0$$

Mit $\nabla f(x)$ bezeichnen wir den *Gradienten von* f an der Stelle x, er ist definiert als

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = 0$$

Beweis: Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein Richtungsvektor wobei $|\xi| = 1$ und $f(x + t\xi) \geq f(x)\ \forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. (Wobei ε gewählt ist wie in der Definition).

$$\begin{aligned} t \in (-\varepsilon,\varepsilon) \quad & \Rightarrow |t\xi| = |t| \cdot |\xi| < \varepsilon \\ & \Rightarrow x + t\xi \in B_\varepsilon(x) \\ & \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x + t\xi) \quad = \quad 0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad = \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \xi_i \end{aligned}$$

Beispiel 9.14: Sei $f(x,y) = \cos(x + 2y) + \cos(2x + 3y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\sin(x + 2y) - 2\sin(2x + 3y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2\sin(x + 2y) - 3\sin(2x + 3y) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sin(x + 2y) = 0$, $\sin(2x + 3y) = 0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} x + 2y \in \pi\mathbb{Z} &\Rightarrow x \in \pi\mathbb{Z} \\ 2x + 3y \in \pi\mathbb{Z} &\Rightarrow y \in \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Wir erhalten also vier verschiedene Lösungen

$$\begin{array}{ccccccccc} x & = & 0 & y & = & 0 & f(0,0) & = & 2 \\ x & = & \pi & y & = & 0 & f(\pi,0) & = & 0 \\ x & = & 0 & y & = & \pi & f(0,\pi) & = & 0 \\ x & = & \pi & y & = & \pi & f(\pi,\pi) & = & -2 \end{array}$$

Beispiel 9.15: Aus der Analysis 1* ist uns folgende Formel bekannt

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q$$

Wir definierten also

$$f(x,y)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q-xy \geq 0$$

Das heisst, $f(x,y)=0$ ist ein globales Minimum.

Definition: Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heisst *kritischer Punkt von* $f \in C^1(\Omega)$, falls

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=0 \qquad\qquad i=1,\dots,n$$

Bemerkung: Wenn x ein lokales Minimum ist, so ist x auch ein kritischer Punkt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht.

$$T_x^2 f(\xi)=f(x)+\underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\xi_i}_{x \text{ ist krit. } 0 \text{ Pkt}}+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\,\xi_i\xi_j}_{\text{Hessesche}}$$

Wir definieren die zweite Ableitung durch

$$\mathbb{R}^{n\times n} \ni A := \mathrm{d}^2 f(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x)\end{pmatrix}$$

dann gilt $A=A^T$, $A=(a_{ij})_{i,j=1}$, $A^T=(a_{ji})_{i,j=1}$

Beweis:

$$a_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)=a_{ji}$$

Definition: Sei $A=A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. A heisst positiv definiert, falls

$$\begin{aligned}\langle \xi, A\xi\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11}\xi_1+\dots+a_{1n}\xi_n \\ \vdots \\ a_{n1}\xi_1+\dots+a_{nn}\xi_n\end{pmatrix}\right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \xi_i a_{ij}\xi_i \\ &> 0 \qquad\qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\end{aligned}$$

Also können wir schreiben

$$T_x^2 f(\xi)=f(x)\mathrm{d}f(x)\xi+\frac{1}{2}\left\langle \xi, \mathrm{d}^2 f(x)\xi\right\rangle$$

Satz 52: Sei $f \in C^3(\Omega)$ eine Funktion und $x \in \Omega$ ein kritischer Punkt von f. Sei weiter $\mathrm{d}^2 f(x)$ positiv definiert. $\Rightarrow x$ ist ein lokales Minimum von f.

Beweis: (1) $A=A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definiert, $\Rightarrow \exists\, \delta>0$, so dass

$$\langle \xi, A\xi\rangle \geq \delta\,|\xi|^2 \qquad\qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\delta := \inf\{\langle \xi, A\xi\rangle \,|\, \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi|=1\} > 0$$

*Lemma 2, Seite 10

Sei $K := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| = 1\}$ eine abgeschlossene, beschränkte Menge und $h : K \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion wobei $h(\xi) = \langle \xi, A\xi \rangle$, $\Rightarrow \exists\, \xi_0 \in K$ so dass $h(\xi_0) \leq h(\xi)$, $\forall\, \xi \in K$. $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
$\Rightarrow \frac{\xi}{|\xi|} \in K$
$\Rightarrow \left\langle \frac{\xi}{|\xi|} \right\rangle, A\frac{\xi}{|\xi|} = \frac{1}{|\xi^2|} \langle \xi, A\xi \rangle \geq \delta$
$\Rightarrow \langle \xi, A\xi \rangle \geq \delta\, |\xi|^2$

(2) $\mathrm{d}^2 f(x)$ ist positiv definiert, $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$, so dass

$$\left\langle \xi, \mathrm{d}^2 f(x)\xi \right\rangle \geq \delta\, |\xi|^2 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^2$$

(3) $\exists\, r > 0$, $\exists\, c > 0$, so dass

$$\left| f(x+\xi) - T_x^2 f(\xi) \right| \leq c\, |\xi|^3 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| < r$$

(Da $f \in C^3(\Omega)$)

$$\begin{aligned} f(x+\xi) &= f(x) + df(x)\xi + \frac{1}{2}\left\langle \xi, \mathrm{d}^2 f(x)\xi \right\rangle + f(x+\xi) - T_x^2 f(\xi) \\ &\geq f(x) + \frac{1}{2}\left\langle \xi, \mathrm{d}^2 f(x)\xi \right\rangle - c\, |\xi|^3 \end{aligned}$$

falls $|\xi| < r$

$$= f(x) + \left(\frac{\delta}{2} - c\, |\xi|\right) |\xi|^2 > f(x)$$

falls $|\xi| < \frac{\delta}{2c}$

(4) Falls $|\xi| < r$ und $|\xi| < \frac{\delta}{2}$ so gilt

$$f(x+\xi) > f(x)$$

$$\varepsilon := \min\left\{ r, \frac{\delta}{2c} \right\}$$

Beispiel 9.16: Sei $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - xy) - x^3 - y^3$ eine Funktion, die für grosse x und y stark negativ wird, deshalb ist $f(0) = 0$ auch kein globales Minimum. Wir wollen aber zeigen, dass es ein lokales Minimum ist.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 f(0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir haben die Gleichung $x^2 + y^2 - xy = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2$ was immer grösser 0 ist. Deshalb ist die Matrix positiv definiert

$$\left\langle \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right), \mathrm{d}^2 f(0) \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) \right\rangle = \xi^2 + \eta^2 - \xi\eta$$

Bemerkung: Die Matrix $\mathrm{d}^2 f(x,y)$ ist genau dann positiv wenn gilt:

(i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$
(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$, dass heisst, $\det(\mathrm{d}^2 f) > 0$

Beispiel 9.17: $f(x,y) = xy$, $x = y = 0$ ist kritischer Punkt und kein lokales Minimum da

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht positiv definiert ist, was sich mit der Bemerkung 2 einfach zeigen lässt: $0 \cdot 0 - 1^2 \not> 0$

Bemerkung: Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A^T$$

Positiv definiert $\Leftrightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & \cdots & a_{jj} \end{pmatrix} > 0 \qquad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n$$

12. Mittelwertsatz für höhere Dimensionen

Satz 53 (Mittelwertsatz): Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen, $K \subset \Omega$ kompakt $\Rightarrow \exists\, c > 0$ $\forall\, x, y \in K$

$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|$$

Beweis: Mit Hilfe des Korollars 17, Seite 127: $\forall\, x \in K$, $\exists\, \varepsilon(x) > 0\ \exists\, c(x) > 0$, so dass

$$|\xi| < \varepsilon(x) \Rightarrow |f(x + \xi) - f(x)| < c(x)\,|\xi|$$

Lokal ist dies schon definiert. Wir nehmen an, die Annahme sei falsch, $\Rightarrow \forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, x_k, y_k \in K$ so dass

$$|f(x_k) - f(y_k)| > k\,|x_k - y_k|$$

Daraus folgt $\exists$ Teilfolgen $x_{k_i} \to x$, $y_{k_i} \to y$, da K kompakt ist. Ausserdem existiert ein $C > 0$, so dass $|f(z)| \leq C$, $\forall\, z \in K$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |x_k - y_k| &\leq \frac{1}{k}\,|f(x_k) - f(y_k)| \\ &\leq \frac{1}{k}\,(|f(x_k)| + |f(y_k)|) \qquad\qquad \leq \frac{2c}{k} \to 0 \end{aligned}$$

weshalb

$$\lim_{i\to\infty} y_{x_i} = \lim_{i\to\infty} x_{k_i} = x$$

Falls i gross genug ist, so gilt $|y_{k_i} - x|$,$|x_{k_i} - x| < \varepsilon(x)$ also

$$\begin{aligned} &|f(y_{k_i} - f(x)| \leq c(x)\,|y_{k_i} - x| \\ &|f(x_{k_i} - f(x)| \leq c(x)\,|x_{k_i} - x| \end{aligned}$$

und somit

$$|f(y_{k_i}) - f(x_{k_i})| \leq 2c(x)\,|y_{k_i} - x_{k_i}|$$

[V35-030502] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion. Dann gilt

(1) $x \in \Omega$ kritischer Punkt von f was aus Defintion bedeutet $df(x) = 0$ und somit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \qquad\qquad i = 1, \ldots, n$$

(2) $x \in \Omega$ lokales Minimum von $f \in C^1 \Rightarrow x$ ist kritischer Punkt von f

(3)

$$\left.\begin{array}{l} f \in C^3 \\ df(x) = 0 \\ d^2 f(x) \text{ positiv definiert} \end{array}\right\} x \text{ ist lokales Minimum}$$

Beispiel 9.18: $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$, $df(x) = 0$, $d^2 f(x) = 0$, also ist $x = 0$ ein lokales Minimum.

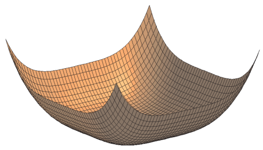
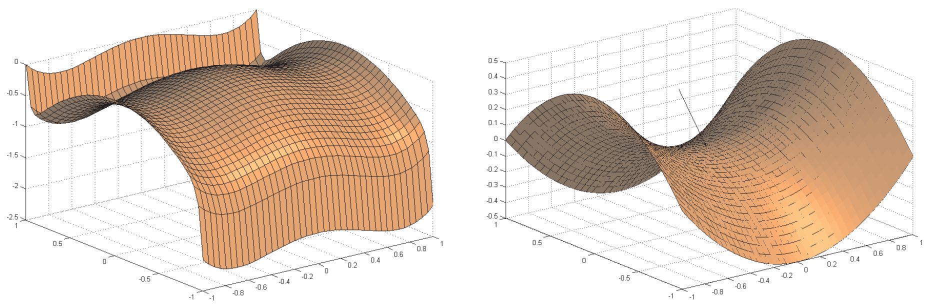


ABBILDUNG 1. $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$



(a) Beispiel 9.20

(b) Beispiel 9.21

(4) $x \in \Omega$ lokales Maximum, $f \in C^1 \Rightarrow x$ ist kritischer Punkt.

Beispiel 9.19: $f(x) = -|x|^2$

(5)

$$\left.\begin{array}{l} f \in C^3 \\ df(x) = 0 \\ d^2 f(x) \text{ negativ definiert} \end{array}\right\} x \text{ ist lokales Maximum}$$

$A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst negativ definiert wenn

$$\langle \xi, A\xi \rangle < 0 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

Beispiel 9.20: $f(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^2 + x^4 + y^27$

$$d^2 f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right), A \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) \right\rangle = -2(\xi)^2 - 2(\eta)^2$$

Der quadratische Teil dominiert die Umgebung um 0.

Beispiel 9.21: $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$. Der Punkt $(0, 0)$ ist kritisch.

$$d^2 f(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist weder positiv noch negativ definiert. Solch einen Punkt nennt man Sattelpunkt.

Satz 54: *ohne Beweis* Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix $\Rightarrow \exists\ \phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so dass $\det(\phi) \neq 0$ und

$$\phi^T A \phi = \begin{pmatrix} {\scriptstyle 0} & & & & {\scriptstyle 0} \\ & {\scriptstyle 1} & & & \\ & & {\scriptstyle -1} & & \\ & & & {\scriptstyle 1} & \\ {\scriptstyle 0} & & & & {\scriptstyle -1} \end{pmatrix}$$

Eine solche Matrix, deren Diagonalelemente 1en, −1en und 0en sind und die die restlichen Elemente 0 sind, nennt man *Diagonalform*.

BEMERKUNG: Die Anzahl der 1en, −1en und 0en hängt nicht von ϕ ab.

Beispiel 9.22: $f(x,y) = xy$

$$d^2f(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = A$$

Seien λ_i Eigenwerte, d.h. $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2$

$$e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \lambda_1 = 1 \qquad e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \lambda_2 = -1$$

also ist ϕ

$$\begin{aligned} \phi &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \\ \phi^T A \phi &= \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

Dividieren von ϕ durch $\sqrt{2}$ ergibt

$$= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$$

Beispiel 9.23: $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $df(0) = 0$

$$d^2f(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Ist diese Matrix positiv definiert? Antwort: Nein, da $\det_1 = 0$, $\det_2 =$ negativ.
Wie viele −1en? $\det A = 2$

$$\begin{aligned} \det(\phi^T A \phi) &= \det \phi^T \cdot \det A \cdot \det \phi \\ &= \underbrace{(\det A)}_{2} \cdot \underbrace{(\det \phi)^2}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

$\phi^T A \phi =$ Diagonalmatrix der dim 3, wobei

(1) Die Diagonalmatrix enthält keine 0 auf der Diagonalen.
(2) Die Diagonale enthält eine ungerade Anzahl −1en führt zu negativ definiert, was ein Widerspruch wäre. Wir erhalten also
 ⇒ Die Diagonale enthält eine gerade Anzahl −1en
 ⇒ Sie enthält null −1en oder zwei −1en.
 ⇒ Die Diagonalmatrix ist nicht positiv definiert, deshalb enthält sie nicht null −1en

Daraus folgt:

$$\phi^T A \phi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$$

$$e = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \; Ae = 2e.$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \nu \perp e$$

Das heisst $A\nu = -\nu$

ZUSAMMENFASSUNG:

keine	0en	nur	1en	=	Minimum
keine	0en	nur	−1en	=	Maximum
keine	0en	gemischt	−1en und 1en	=	Sattelpunkt

Definition: Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion und sei $x \in \Omega$ ein kritischer Punkt von f.

(i) Ein Punkt x wird *nicht degeneriert* genannt, falls keine Nullen in der Diagonalform auftreten, d.h. $\det\big(d^2f(x)\big) \neq 0$

(ii) Sei x ein nicht degenerierter kritischer Punkt von f. Sei $\phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so gewählt dass $\phi^T d^2 f(x)\phi$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix}$$

hat. Dann nennen wir die Anzahl der -1en in dieser Diagonalform den *Index von x*. Notation:

$\mu_f(x) :=$ Index des kritischen Punktes x von f

Beispiel 9.24 (Standart-):

$$f(x_1,\dots,x_n) = -x_1^2 - \dots - x_m^2 + x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2$$

Lemma 32 (Morse): *ohne Beweis* Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\infty(\Omega)$ eine Funktion, $x_0 \in \Omega$ ein nicht degenerierter Punkt mit Index $\mu_f(x_0) = m$. $\Rightarrow$ f lässt sich durch *Koordinatenwechsel* in der Nähe von x_0 in die Normalform

$$\xi(\xi_1,\dots,\xi_n) = -\xi^2 - \dots - \xi_m^2 + \xi_{m+1}^2 + \dots + \xi_n^2$$

überführen.

Was ist ein Koordinatenwechsel? Es ist eine Abbildung die es uns erlaubt, die Koordinaten $x_1,\dots,x_n$ zu verändern in eine Form, dass die Abbildung bijektiv und in beide Richtungen ableitbar ist.

Definition: Seien U,$V \in \mathbb{R}^n$ zwei offene Mengen. Eine Abbildung $f: U \to V$ heisst C^1 *Diffeomorphismus*, wenn gilt:

(1) f ist bijektiv
(2) f ist stetig differenzierbar
(3) f^{-1} ist stetig differenzierbar

Das Morse Lemma „revisited“: $\exists$ offene Menge $U \in \Omega$ so dass $x_0 \in U$, $\exists$ offene Menge $V \in \mathbb{R}^n$ so dass $0 \in V$, $\exists$ ein Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$

$$f\big(\varphi^{-1}(y)\big) = -y_1^2 - \dots - y_m^2 + y_{m+1}^2 + \dots + y_n^2$$

Beispiel 9.25: $U = \mathbb{R}$, $V = (0,\infty)$.

$$f(x) = e^x \qquad\qquad f^{-1}(y) = \ln y$$

ist ein Diffeomorphismus

Beispiel 9.26: $U = V = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

(1) f bijektiv ✓
(2) f differenzierbar ✓
(3) $f^{-1} = y^{1/3}$ nicht differenzierbar in 0

Das heisst, $f(x) = x^3$ ist kein Diffeomorphismus.

Lemma 33: Seien U,$V \in \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f: U \to V$ ein C^1 Diffeomorphismus. $\Rightarrow \det\big(df(x)\big) \neq 0$ $\forall\, x \in U$.

$$d\big(f^{-1}(y)\big) = df\big(f^{-1}(y)\big)^{-1} \qquad\qquad \forall\, y \in V$$

f invertierbar bedeutet, die Jacobi Matrix ist invertierbar.

Beweis: $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$. Da beide Funktionen f und f^{-1} differenzierbar sind, können wir die Kettenregel anwenden.

$$df^{-1}\big(f(x)\big) \cdot d\big(f(x)\big) = \mathbb{1}$$
$$\Rightarrow df^{-1}\big(f(x)\big) = df(x)^{-1}$$

Beispiel 9.27: $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$, $V = \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-|x|}} \quad \text{differenzierbar}$$

Ist f bijektiv?

$$\begin{aligned}
y &= f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-|x|}} \\
|y|^2 &= \frac{|x|^2}{\sqrt{1-|x|^2}} \\
\Rightarrow \quad |y|^2 &= \frac{|x|^2}{1-|x|^2} \\
\Rightarrow \quad |y|^2 - |x|^2\,|y|^2 &= |x|^2 \\
\Rightarrow \quad 1 + |y|^2 - |x|^2 - |x|^2\,|y|^2 &= 1 \\
\Rightarrow \quad (1+|y|^2)(1-|x|^2) &= 1 \\
\Rightarrow \quad x &= y \cdot \sqrt{1-|x|^2} \\
&= \frac{y}{\sqrt{1+|y|^2}} \\
&= f^{-1}(y)
\end{aligned}$$

$f^{-1} : V \to U \Rightarrow C^\infty$ Diffeomorphismus

Beispiel 9.28: $U = V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Die Funktion

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

ist C^∞. Wenn wir sie komplex ausdrücken, $z = x + iy$, erhalten wir

$$f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

$\Rightarrow f' \circ f = \mathrm{id}$, $\Rightarrow f' = f$, $\Rightarrow$ Diffeomorphismus.

Beispiel 9.29: Seien

$$U = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\} \qquad V = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1\}$$

zwei Mengen und

$$\zeta = f(\zeta) = \frac{z-i}{z+i}$$

eine Funktion. Diese Funktion bildet die obere Halbebene auf der Einheitsscheibe ab (*siehe komplexe Analysis*) $\Im(z) > 0 \Rightarrow |f(z)| < 1$

$$\zeta(z+i) = z - 1$$

$$\Rightarrow z = i\frac{i+\zeta}{\zeta - i} = f^{-1}(\zeta)$$

Satz 55 (Inverse Funktionen): [V36-060502] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. f sei stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in \Omega$ so dass

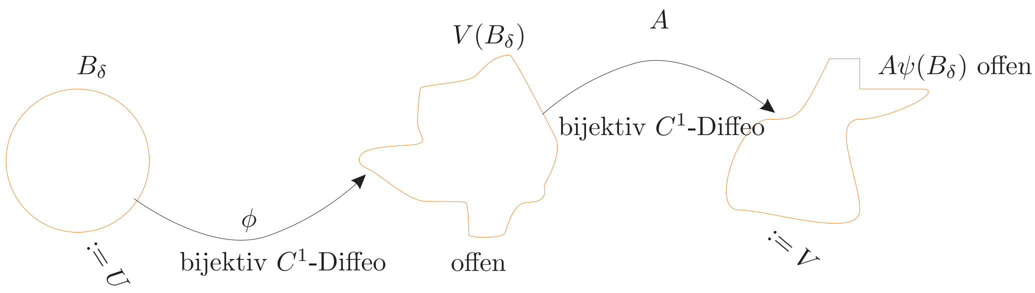
$$\det\big(df(x_0)\big) \neq 0$$

Das heisst $\exists$ eine offene Menge $U \subset \Omega$, so dass $x_0 \in U$ und $V := f(U)$ ebenfalls offen ist und

$$f|u : U \to V$$

ein C^1-Diffeomorphismus.

Beispiel 9.30: $n = 1$, $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$. Da die Funktion injektiv sein muss, muss $U = (-\pi/2, \pi/2) \to V = (-1, 1)$.



Beispiel 9.31: $f(x) = x^2$, $x_0 = \varepsilon$, $f'(\varepsilon) = 2\varepsilon \neq 0$. f' kann sehr klein werden, wenn ε auch sehr klein wird. Sei $U = (0, 2\varepsilon)$, $V = (0, 4\varepsilon^2)$ und $f : U \to V$

Für den Beweis des Satzes genügt es, sich auf den Spezialfall $f'(0) = \text{id}$ zu beschränken, was folgendes Lemma aussagt.

Lemma 34: Wir bezeichnen $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| < r\}$, $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x - x_0| < r\}$. Es sei $\psi : B_r \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Funktion, so dass $\psi(0) = 0$ und

$$|d\psi(x) - \mathbb{1}| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall\, x \in B_r$$

Daraus folgt

(1) ψ injektiv
(2) $B_{r/2} \subset \psi(B_r) \subset B_{2r}$
(3) $\psi(B_r)$ ist offen
(4) $\psi^{-1} : \psi(B_r) \to B_r$ ist stetig differenzierbar und

$$d\psi^{-1}(y) = d\psi\big(\psi^{-1}(y)\big)^{-1}$$

Aus dem Lemma 34 folgt der Satz 55.

Beweis: Annahme: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. $f(0) = 0$. Sei $A := df(0) \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung ist $\det(A) \neq 0$, $\Rightarrow A^{-1}$ existiert. Wir definieren $\psi(x) := A^{-1} f(x)$

$$\begin{aligned} d\psi(x) - \mathbb{1} &= A^{-1} df(x) - \mathbb{1} \\ &= A^{-1}\big(df(x) - A\big) \\ &= A^{-1}\big(df(x) - df(0)\big) \end{aligned}$$

Wenn jetzt zum Beispiel

$$\varepsilon = \frac{1}{2\,|A^{-1}|}$$

dann gibt es, da f C^1 ist, ein $\delta > 0$, so dass

$$\begin{aligned} |x| < \delta \Rightarrow |df(x) - f(0)| &< \frac{1}{2\,|A^{-1}|} \\ \Rightarrow |d\psi(x) - \mathbb{1}| \leq \left|A^{-1}\right| &\underbrace{|df(x) - f(0)|}_{< \frac{1}{2|A^{-1}|}} \\ &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aus Lemma 34 mit $r = \delta$ folgt $\psi(B_\delta)$ ist offen und $\psi : B_\delta \to \psi(B_\delta)$ ist ein Diffeomorphismus.

$$\begin{aligned} f(x) &= A\psi(x) \\ f^{-1}(y) &= \psi^{-1}(A^{-1}y) \end{aligned}$$

Sei $U := B_\delta$ und $V := A\psi(B_\delta)$

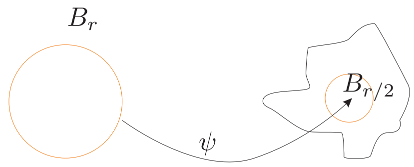


Abbildung 2. Bild zur Behauptung 1

Beweis (Lemma 34): Sei $\phi(x) := x - \psi(x)$ und $\phi : B_r \to \mathbb{R}^n$. Wenn wir uns die Jacobimatrix ansehen

$$d\phi(x) = \mathbb{1} - d\psi(x)$$
$$|d\phi(x)| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall\, x \in B_r$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} |\phi(x_1) - \phi(x_0)| &= \left| \int_0^1 d\phi(x_0 + t(x_1 - x_0)) \cdot (x_1 - x_0)\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{|d\phi(x_0 + t(x_1 - x_0))|}_{\leq \frac{1}{2}} \mathrm{d}t\, |x_1 - x_0| \\ &\leq \frac{1}{2} |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |\phi(x_1) - \phi(x_0)| &= |x_1 - \phi(x_1) - x_0 + \phi(x_0)| \\ &\leq |x_1 - x_0| + |\phi(x_1) - \phi(x_0)| \\ &\leq \frac{3}{2} |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Das heisst

$$|\phi(x_1) - \phi(x_0)| \geq |x_1 - x_0| - |\phi(x_1) - \phi(x_0)| \geq \frac{1}{2} |x_1 - x_0|$$

Zusammengefasst also $\forall\, x_1, x_0 \in B_r$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |x_1 - x_0| &\leq |\phi(x_1) - \phi(x_0)| \\ &\leq 2\, |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Wenn x_0 und x_1 gleich wären, wäre die Ungleichung nicht erfüllt, also ist ψ injektiv. Ausserdem folgt auch $\psi(B_r) \subset B_{2r}$. Damit ist 1 und 3 ✓.

Behauptung 1: $\boxed{B_{r/2} \subset \psi(B_r)}$. *Siehe Abbildung* Gebeben sei $y \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$|y| < \frac{r}{2}$$

Gesucht ist ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $|x| < r$, $\psi(x) = y$. $\phi(x) := x - \psi(x)$

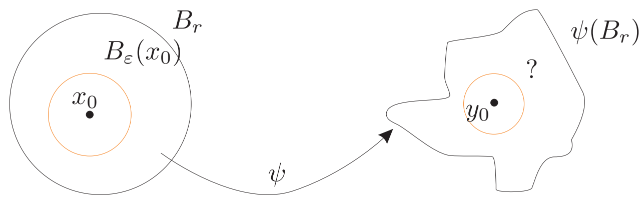
$$y = \psi(x) = x - \phi(x) \Leftrightarrow \phi(x) + y = x$$

Sei

$$\varepsilon = \frac{r}{2} - |y| > 0$$

und

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| \leq r - \varepsilon\} = \overline{B_{r-\varepsilon}}$$



K ist abgeschlossen. Sei $f : K \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$f(x) := y + \phi(x)$$

Folgendes gilt

(1) $\boxed{f(K) \subset K}$ $x \in K, \Rightarrow |x| \leq y - \varepsilon. \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\phi(x) - y| \\ &\leq |\phi(x) - \phi(0)| + |y| \\ &\leq \frac{1}{2}|x| + |y| \\ &\leq \frac{1}{2}(r - \varepsilon) + \frac{r}{2} - \varepsilon \\ &\leq r - \varepsilon \end{aligned}$$

Das heisst $f(x) \in K$

(2) $\boxed{|f(x_1) - f(x_0)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|}$ $\forall\, x_0, x_1 \in K$

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_0)| &= |\phi(x_1) - \phi(x_0)| \\ &= \frac{1}{2}|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

13. Banachscher Fixpunktsatz

Satz 56 (Banachscher Fixpunktsatz): Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $f : K \to K$ eine stetige, *kontrahierende* Funktion. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ so dass

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq \alpha |x_1 - x_0| \qquad \forall\, x_1, x_0 \in K$$

Daraus folgt, es existiert genau ein Punkt $x_0 \in K$, so dass

$$f(x_0) = x_0$$

Aus 1 und 2 folgt der Banachsche Fixpunkt Satz. f hat einen Fixpunkt $x \in K$

$$x = f(x) = y + \phi(x)$$

Damit ist auch Punkt 2 des Lemmas 34 bewiesen.

Behauptung 3: $\boxed{\phi(B_r) \text{ offen}}$ Sei $y_0 \in \psi(B_r)$, sei $x_0 \in B_r$ so dass

$$\psi(x_0) = y_0$$

Wähle $\varepsilon := r - |x_0| > 0$. Dann gilt $B_\varepsilon(x) \subset B_r$

$$\overset{2}{\Rightarrow} B_{\varepsilon/2}\big(\psi(x_0)\big) \overbrace{\subset}^{*} \psi\big(B_\varepsilon(x_0)\big) \subset \psi(B_r)$$

Beweis (von $*$): 2. anwenden auf f

$$\psi_0(x) := \psi(x_0 + x) + \psi(x_0)$$

Behauptung 4: $\boxed{\psi^{-1} \text{ ist differenzierbar}}$ Sei $y_0 \in \psi(B_r)$ und $x_0 := \psi^{-1}(y_0)$ und $A = d\psi(x_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Warum ist A invertierbar? M

$$|A - \mathbb{1}| \leq \frac{1}{2}$$

Daraus folgt, man kann die Inverse hinschreiben als geometrische Reihe.

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{1} - A)^k$$

Die Reihe konvergiert absolut.

$$\left|\left|(\mathbb{1} - A)^k\right|\right| \leq ||\mathbb{1} - A||^k = \frac{1}{2^k}$$

ausserdem

$$\begin{aligned} A \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{1} - A)^k &= A\left(\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty}(\mathbb{1} - A)^k\right) \\ &= A + \sum_{k=1}^{\infty}(A - \mathbb{1})(\mathbb{1} - A)^k + \sum_{k=1}^{\infty}(\mathbb{1} - A)^k \\ &= A - \sum_{k=2}^{\infty}(\mathbb{1} - A)^k + \sum_{k=1}^{\infty}(\mathbb{1} - A)^k \\ &= A + \mathbb{1} - A = \mathbb{1} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{1} - A)^k \\ \left|A^{-1}\right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|(\mathbb{1} - A)^k\right| \\ &< \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da ψ differenzierbar $\exists\, \delta > 0$ so dass $|x - x_0| < 2\delta$, $\Rightarrow$

$$|\psi(x) - \psi(x_0) - A(x - x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4}|x - x_0|$$

Wähle δ so klein, dass $B_\delta(y_0) \subset \psi(B_r)$. Sei $|y - y_0| < \delta$ und $x := \psi^{-1}(y)$. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} |x - x_0| \leq 2\,|\psi(x) - \psi(x_0)| &= 2(y - y_0) \leq 2\delta \\ \left|\psi^{-1}(y) - \psi^{-1}(y_0) - A^{-1}(y - y_0)\right| &= \left|x - x_0 - A^{-1}(\psi(x) - \psi(x_0))\right| \\ &= \left|A^{-1}\big(A(x - x_0) + \psi(x_0) - \psi(x)\big)\right| \\ &\leq 2\,|\psi(x) - \psi(x_0) - A(x - x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}|y - y_0| \end{aligned}$$

[V37-130502] Sei $a_k \in \mathbb{R}$ so dass

$$|a_k| \leq 2^{-k}$$

Warum konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad ?$$

Sei

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Dann gilt $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$, $\forall\, n \geq n_0$

$$|x_n - x_{n_0}| < \varepsilon$$

Definition: Eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ in $\mathbb{R}^m$ heisst *Cauchyfolge*, wenn sie folgende Bedingung erfüllt: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k, l \in \mathbb{N}$

$$k, l \geq k_0 \Rightarrow |x_k - x_l| < \varepsilon$$

Für unser Beispiel erhalten wir

$$\begin{aligned} x_l - x_k &= \left| \sum_{j=1}^{l} a_j - \sum_{k=1}^{k} a_j \right| \\ &= \left| \sum_{j=k+1}^{l} a_j \right| \\ &\leq \sum_{j=k+1}^{l} |a_j| \\ &\leq \sum_{j=k+1}^{l} 2^{-j} < 2^{-k} \end{aligned}$$

es ist also eine Cauchyfolge.

Satz 57: Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}^m$ konvergiert.

Beweis: Wir müssen zeigen

(1) Jede Cauchyfolge ist beschränkt
(2) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge
(3) Jede Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, konvergiert

(1) Wähle ein k_0, so dass $\forall\, k \geq k_0$ gilt

$$|x_k - x_{k_0}| < 1$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |x_k| &\leq |x_{k_0}| + |x_k - x_{k_0}| \\ &\leq |x_{k_0}| + 1 \end{aligned}$$

Sei $c := \max_{1 \leq j \leq k_0} |x_j| + 1$, daraus folgt $\forall\, k \in \mathbb{N}\ |x_k| \leq c$

(2) Bewiesen durch den Satz von Bolzano Weierstrass.

(3) Nehmen wir an, dass $x_k \in \mathbb{R}^m$ eine Cauchy Folge ist und eine konvergente Teilfolge x_{k_i} besitzt. Sei

$$x := \lim x_{k_i}$$

Sei weiter $\varepsilon > 0$. Wähle nun ein $i_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\, i \in \mathbb{N}$ gilt

$$i \geq i_0 \Rightarrow |x_{k_i} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wähle weiter ein k_0, so dass $\forall\, k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$k, l \geq k_0 \Rightarrow |x_k - x_l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

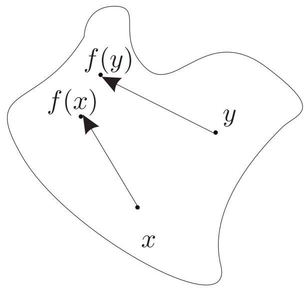


Abbildung 3. Kontraktion

Daraus folgt $\forall\, k \geq k_0$ gilt: Wähle ein $i \in \mathbb{N}$ so dass $k_i \geq k_0$ und $i \geq i_0$

$$\begin{aligned} |x - x_k| &= |x - x_{k_i} + x_{k_1} - x_k| \\ &\leq |x - x_{k_i}| + |x_{k_i} - x_k| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Manchmal ist es nützlich, statt die Konvergenz einer Folge die Existenz einer Cauchy Folge zu zeigen.

Bemerkung: Die Definition einer Cauchyfolge lässt sich auf beliebige metrische Räume übertragen.

Errinnerung: Ein metrischer Raum (X, d) mit $d : X \times X \to [0, \infty)$ erfüllt folgende Eigenschaften:

(1) $d(x, y) = d(y, x)$
(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Mit der Definition des metrischen Raumes können wir auch sagen, $x_k \in X$ heisst Cauchyfolge, wenn $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_i \in \mathbb{N}$ so dass $\forall\, k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$k, l \geq k_0 \Rightarrow d(x_k, x_l) < \varepsilon$$

Bemerkung: Der Satz 57 gilt speziell für $\mathbb{R}^n$, aber nicht im Komplexen.

Definition: Ein metrischer Raum X_d heisst *vollständig* oder *Banachraum*, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to X$ heisst *Kontraktion*, wenn es eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $0 \leq \alpha \leq 1$ und $\forall\, x, y \in X$

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq \alpha d(x, y)$$

Satz 58 (Banachscher Fixpunktsatz): *Kontraktionsprinzip* Sei (X, d) ein nicht leerer, vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion. Dann gilt: f besitzt genau einen Fixpunkt.

Beweis: Eindeutigkeit: Seien x_0, $x_1 \in X$ so dass $f(x_0) = x_0$ und $f(x_1) = x_1$. Dann gilt

$$\begin{array}{rrcl} & d(x_0, x_1) & = & df\big(f(x_0), f(x_1)\big) \\ & & \leq & \alpha d(x_0, x_1) \\ \Rightarrow & \underbrace{(1-\alpha)}_{>0}\underbrace{d(x_0, x_1)}_{\geq 0} & \leq & 0 \\ \Rightarrow & d(x_0, x_1) & = & 0 \\ \Rightarrow & x_0 & = & x_1 \end{array}$$

EXISTENZ: Trick: Wir wählen einen Punkt in x und wenden f darauf an $\to x_1$, wir wenden f auf x_1 an $\to x_2$ und so weiter. Behauptung: Egal welchen Startpunkt wir wählen, wir enden beim Fixpunkt.
Sei $x_0 \in X$. Wir definieren eine Folge $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots$ in X durch

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f\big(f(x_0)\big) \\ x_3 &= f\Big(f\big(f(x_0)\big)\Big) \dots \end{aligned}$$

Behauptung: $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &= d\big(f(x_1), f(x_0)\big) \le \alpha d(x_1, x_0) \\ d(x_3, x_2) &= d\big(f(x_2), f(x_1)\big) \le \alpha d(x_2, x_1) \le \alpha^2 d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Durch Induktion folgt

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &\le \alpha d(x_k, x_{k-1}) \\ &\le \alpha^k d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Sei $l > k$. Die Definition des metrischen Raums erlaubt uns, k und l zu tauschen ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Die Dreiecksungleichung liefert:

$$\begin{aligned} d(x_l, x_k) &\le d(x_l, x_{l-1}) + d(x_{l-1}, x_{l-2}) + \dots + d(x_{k+1}, x_k) \\ &= \sum_{j=k}^{l-1} d(x_{j+1}, x_j) \\ &= \sum_{j=k}^{l-1} \alpha^j d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^k - \alpha^l}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \\ &\le \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle k_0 so dass

$$\frac{\alpha^{k_0}}{1-\alpha} d(x_1, x_0) < \varepsilon$$

Dann gilt für alle k, l

$$l \ge k \ge k_0 \Rightarrow d(x_l, x_k) < \varepsilon$$

Das heisst $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist konvergiert x_k. Sei

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k \in X$$

Daraus folgt

$$f(x) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right)$$

Jede Kontraktion ist stetig, da man $\varepsilon = \delta$ setzen kann, also

$$\begin{aligned} &= \lim_{k\to\infty} f(x_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x \qquad \square \end{aligned}$$

Beispiel 9.32: Sei $X = \mathbb{R}$, das heisst

$$d(x,y) = |x-y|$$

X ist vollständig und $X \neq 0$. Sei

$$f(x) = x + e^{-x}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} d\big(f(x), f(y)\big) &= |f(x) - f(y)| \\ &\leq \max_{x \leq \xi \leq y} |f'(\xi)|\,|x-y| \\ f'(\xi) &= 1 - e^{-\xi} \end{aligned}$$

Wir betrachten $X' = [0, \infty)$, was auch eine vollständige Menge darstellt, womit $0 < f'(\xi) < 1$, und somit

$$\max_{x \leq \xi \leq y} |f'(\xi)| \leq 1$$

das heisst

$$|f(x) - f(y)| < |x-y|$$

Die Funktion f hat keinen Fixpunkt, denn $f(x) > x$. Wieso ist unser Satz 58 nicht verletzt? Wir haben

- einen metrischen Raum der nicht leer ist
- eine vollständige Teilmenge
- Eine Abbildung f des Raumes auf sich selbst.

Aber wir haben kein $\alpha < 1$, somit ist f keine Kontraktion.

Beispiel 9.33: Sei $X := [0, 1)$ und

$$f(x) = \frac{1}{2}(1+x)$$

eine Funktion. $f'(x) = \frac{1}{2}$, daraus folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}\,|x-y|$$

womit f eine Kontraktion ist ($\alpha < \frac{1}{2}$). Für den Fixpunkt gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2} &= x \end{aligned}$$

voraus folgt, $x_{fix} = 1 \notin X$, das heisst X ist nicht vollständig.

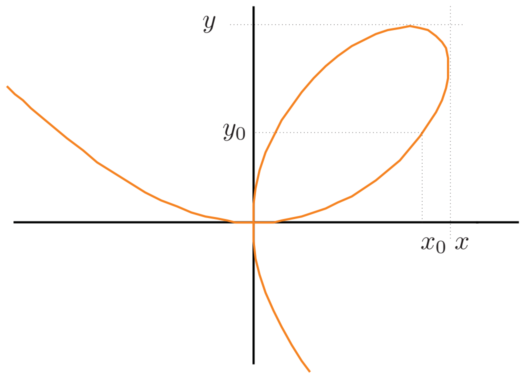
14. Implizite Differentiation

[V38-170502] Sei $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$ eine implizite Funktion wobei $f(x_0, y_0) = 0$ und $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ Frage: Gibt es eine explizite Funktion $y = \phi(x)$, so dass in der Nähe von (x_0, y_0) gilt

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$$

Also folgt aus $f(x, \phi(x)) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\big(x, \phi(x)\big) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \phi(x)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \phi(x)\big) \cdot \phi'(x) \end{aligned}$$



Die Kettenregel besagt, wenn $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \big(x, \phi(x)\big)$, $h = f \circ g = f\big(g_1(x), g_2(x)\big)$

$$h' = \partial_1 f\big(g_1(x), g_2(x)\big) \cdot g_1'(x) + \partial_2 f\big(g_1(x), g_2(x)\big) \cdot g_2'(x)$$

Errinnerung: Wir unterscheiden

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\big(x, \phi(x)\big) = \lim_{\xi \to 0} \frac{f\big(x+\xi, \phi(x+\xi)\big) - \big(f(x, \phi(x)\big)}{\xi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} f\big(x, \phi(x)\big) = \lim_{\xi \to 0} \frac{f\big(x+\xi, \phi(x)\big) - \big(f(x, \phi(x)\big)}{\xi}$$

Eine Notwendige Bedingung für die Existenz von ϕ ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Unter der Annahme, dass $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, falls ϕ existiert, so gilt

$$\phi'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \phi(x)\big)}{\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \phi(x)\big)}$$

In unserem Eingangsbeispiel also

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial y} & = & 3y^2 - 3ax = 0 \\ f & = & x^3 + y^3 - 3axy = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 = ax \Rightarrow x^3 - 2axy = 0 \Rightarrow x^2 = 2ay \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}a$$

Woraus folgt

$$x = \sqrt[3]{4} \cdot a$$

und da die Funktion f symmetrisch ist

$$y = \sqrt[3]{4} \cdot a$$

Sei nun allgemein

$$f_n(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$$

eine Funktion in impliziter Form. Wir wollen $y = \phi(x)$ finden, dazu brauchen wir l Gleichungen

$$\begin{array}{c} f_1(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_l(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l) = 0 \end{array}$$

welche die Funktion implizit beschreiben.

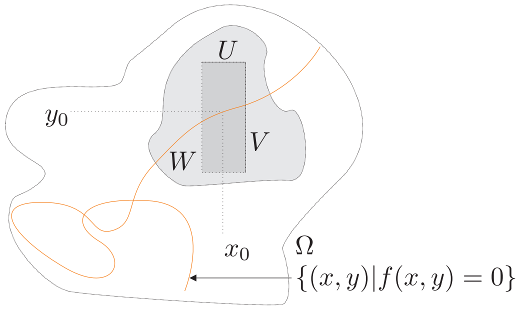


ABBILDUNG 4. Satz über implizite Funktionen

NOTATION: Wir definieren

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l\times k} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l\times l}$$

Abgekürzt schreiben wir

$$f : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$$
$$df(x,y) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

Die Bedingung, die f erfüllen muss damit wir die Gleichung $f(x,y)=0$ nach y auflösen können ist

$$\det\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \neq 0$$

Satz 59 (Implizite Funktionen): Sei $\Omega \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^l$ eine C^1-Funktion. Sei weiter $(x_0, y_0) \in \Omega$ gegeben, so dass

$$\det\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right) \neq 0$$

(Wir nehmen also nur die Spalten der Jacobimatrix, die zu y gehören.) Das heisst $\exists$ offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^l$ und eine C^1-Funktion $\phi : U \to V$, so dass folgendes gilt:

- $x_0 \in U$, $y_0 \in V$
- $U \times V \in \Omega$
- $\forall\, x \in U, \forall\, y \in V : f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$

(Man könnte den Satz auch auf C^2,C^3, ...erweitern, d.h. f und ϕ sind C^2, C^3, ...Funktionen.)
Siehe Abb. 4

Beweis: Man kann den Satz auf den Inversensatz (55) zurückführen. Die Funktion ist lokal invertierbar wenn die Jacobi Determinante det $\neq 0$ ist, was bereits vorausgesetzt wurde. In unserem Satz haben wir keine Möglichkeit, eine Umkehrfunktion zu bilden, da keine Abbildung eines Raumen in einen anderen der selben Dimension vorliegt. Wir müssen also unsere Funktion erweitern. Wir erweitern unsere Funktion f zu einer Funktion

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

und definieren sie durch

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

statt x wäre 0 die einfachste Möglichkeit, diese ist aber wegen der Bedingung $\det(\cdot) \neq 0$ nicht zulässig. Für $\mathrm{d}F\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k} & \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l}
\end{array}\right)$$

welche wir abkürzen mit

$$\mathrm{d}F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{k\times k} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

für die Determinante erhalten wir also

$$\det\big(\mathrm{d}F(x_0, y_0)\big) = \det\big(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\big) \neq 0$$

was wir ja vorausgesetzt haben. Wenden wir nun den Inversensatz an, das heisst $\exists\, W \in \Omega$ offen, so dass

(i) $[x_0, y_0] \in W$
(ii) $F(W) \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ ist offen
(iii) $F : W \to F(W)$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion $F^{-1} : F(W) \to W$ ist C^1

Wir wählen

$$\begin{array}{lclcl} V & = & B_\varepsilon(y_0) & = & \{y \in \mathbb{R}^l \,|\, |y - y_0| < \varepsilon\} \\ U & = & B_\delta(x_0) & = & \{x \in B_\varepsilon(y_0) \,|\, |x - x_0| < \delta\} \end{array}$$

so dass $U \times V \subset W$ und

$$U \times \{0\} \subset F(W) \ni (x_0, 0) = F(x_0, y_0)$$

Um die eingeführten x wieder loszuwerden definieren wir die Projektion

$$\pi_2 := \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \qquad \pi_2(x, y) := y$$

Wir betrachten die Funktion

$$U \to \mathbb{R}^l : x \mapsto \pi_2\big(F^{-1}(x, 0)\big)$$

Wir wissen $(x_0, 0) = F(x_0, y_0)$ also ist $F^{-1}(x_0, 0) = (x_0, y_0)$ und $\pi_2\big(F^{-1}(x_0, 0)\big) = y_0$ wodurch

$$x_0 \mapsto y_0 = \pi_2\big(F^{-1}(x_0, 0)\big)$$

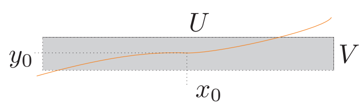
Nach Stetigkeitsvoraussetzung können wir δ so klein wählen dass

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \big|\pi_2\big(F^{-1}(x, 0) - y_0\big)\big| < \varepsilon$$

das heisst $x \in U \Rightarrow \pi_2\big(F^{-1}(x, 0)\big) \in V$. Wir definieren $\phi : U \to V$ durch

$$\phi(x) := \pi_2\big(F^{-1}(x, 0)\big)$$

Wenn wir U zu gross wählen, können wir immer noch ϕ auf U hinschreiben, aber das Bild liegt nicht mehr in V.



$F^{-1}(x,0) = \big(x, \phi(x)\big)$, das heisst

$$f\big(x, \phi(x)\big) = f\big(F'(x,0)\big)$$

$\pi_2 \circ F = f$ also

$$\begin{aligned} &= \pi_2 \circ F \circ F^{-1}(x,0) \\ &= \pi_2 \circ (x,0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das Umgekehrte gilt auch, wir könne ϕ gar nicht anders wählen. Sei $x \in U$ und $y \in V$ so dass $f(x,y) = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ (x,y) = F^{-1}(x,0) \\ &\Rightarrow\ y = \phi(x) \\ &\Rightarrow\ y = \pi_2 \circ F^{-1}(x,0) \\ &\Rightarrow\ y = \phi(x) \qquad \square \end{aligned}$$

Satz 60 (Implizite): [V39-240502] Sei $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 eine Funktion.

(1) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Aus dem Inverse Funktionen Satz (55, S.136) folgt: Die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = c\}$ lässt sich lokal darstellen als Graph einer C^1 Funktion $y = \phi(x)$. $f(x_0, y_0) = c$
(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, daraus folgt, die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = c\}$ lässt sich lokal darstellen als Graph einer C^1 Funktion $x = \psi(x)$

Definition: Eine Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^2$ heisst *glatte Kurve* wenn es für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in$ zwei offene Intervalle $U, V \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ und eine der folgenden Aussagen gilt

(1) $\exists$ C^1 Funktion $\phi : U \to V$ so dass $(x,y) \in C \cap (U \times V) \Leftrightarrow y = \phi(x)$
(2) $\exists$ C^1 Funktion $\psi : V \to U$ so dass $(x,y) \in C \cap (U \times V) \Leftrightarrow x = \psi(y)$

Definition: Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion. Eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ heisst regulärer Wert von f wenn $\forall\, x \in \Omega$ folgendes gilt

$$f(x) = C \Rightarrow \nabla f(x) \neq 0$$

Satz 61 (Implizite Funktionen): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion. Falls $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f ist, so ist die Menge

$$f^{-1}(c) = \{(x,y) \in \Omega | f(x,y) = c\}$$

eine glatte Kurve

Beispiel 9.34: $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= (3x^2 - 3ay, 3y^2 - 3ax) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt, entweder ist $x = a$ und $y = a$ oder $x = 0$ und $y = 0$ also $(0,0)$ (a,a). Für die Funktionswerte gilt: $f(0,0) = 0$, $f(a,a) = -a^3$. Also sind

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) \\ f^{-1}(-a^3) \end{aligned}$$

keine glatte Kurve

Beispiel 9.35: $f(x,y) = x^3$

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (3x^2, 0) \\ &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$f^{-1}(c) = \{(c^{\frac{1}{3}}, y) | y \in \mathbb{R}\}$$

$c = 0$ kein regulärer Wert. Dennoch ist $f^{-1}(c)$ eine glatte Kurve. Wieso?

Beispiel 9.36: $f(x, y) = ax^2 + by^2$

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (2ax, 2by) \\ &= 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0 \end{aligned}$$

$f^{-1}(c)$ Ellipse

Beispiel 9.37: $f(x, y) = ax^2 - by^2$

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

$c \in \mathbb{R}$ regulärer Wert $\Leftrightarrow c \neq 0$, $f^{-1}(0)$ keine glatte Kurve

15. Tangentialräume

Definition: Sei $C \subset \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve und $z_0 = (x_0, y_0) \in C$. Der Tangentialraum von C an der Stelle z_0 ist definiert als die Menge

$$T_{z_0}C := \{\zeta \in \mathbb{R}^2 | \exists\, C^1 \text{ Funktion } z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2 : t \to z(t)\}$$

so dass

(i) $z(t) \in C \quad \forall\, t$
(ii) $z(0) = z_0$
(iii) $\dot{z}(0) = \zeta$

Behauptung: $T_{z_0}C$ ist ein 1 dimensionaler linearer Unterraum des $\mathbb{R}^2$, C glatte Kurve, $z_0 = (x_0, y_0) \in C$, U, V offene Intervalle. $x_0 \in U$, $y_0 \in V$

Fall 1: $C \cap (U \times V) = \{(x, y) | x \in U, y = \phi(x)\}$ $y_0 = \phi(x_0)$

$$T_{z_0}C = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 | \eta = \phi'(x_0)\xi\}$$

$z(t) := (x_0 + t\xi, \phi(x_0 + t\xi)) \in C$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$. Wähle $\varepsilon > 0$ so dass $x_0 + t\xi \in U$, $\forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$z(0) = (x_0, \phi(x_0))$$

$$(x_0, y_0) = z_0$$

$\rho = (\xi, \eta) := \dot{z}(0) = (\xi, \phi'(x_0)\xi)$, $z(t) = (x(t), y(t)) \in C$, $z(0) = z_0$
$\Rightarrow$ $z(t) \in U \times V$ für t klein
$\Rightarrow$ $y(t) = \phi(x(t))$ für t klein
$\Rightarrow$ $\dot{y}(0) = \phi'(x_0)\dot{x}(0)$

2. Fall: $C \cap (U \times V) = \{(x, y) | x = \psi(y)\}$, $z_0(\psi(y_0), y_0) \Rightarrow$

$$T_{z_0}C = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 | \xi = \psi'(y_0)\eta\}$$

Lemma 35: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion. $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. $C := f^{-1}(c)$, $z_0 \in c \Rightarrow T_{z_0}C = \nabla f(z_0)^\perp =$

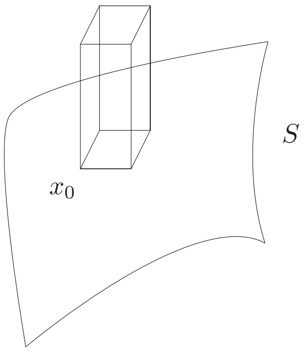
$$\left\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta = 0\right\}$$

Beweis: C lokal $= \{(x, y) \in U \times V | y = \phi(x)\}$ $f(x, \phi(x)) = c$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))\phi'(x) = 0$

$$\phi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Sei $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ dann gilt $(\xi, \eta) \in T_{z_0}C \Leftrightarrow \eta = \phi'(x_0)\xi \Leftrightarrow$

$$\eta = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}\xi \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta = 0$$



Definition: [V40-270502] Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heisst *glatte Fläche*, wenn es für jeden Punkt $x_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, x_{0_3}) \in S$ zwei offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^2$, $V \subset \mathbb{R}$ und eine C^1-Funktion $\phi : U \to V$ gibt so dass eine der folgende 3 Aussagen gilt:

(i) $(x_{0_1}, x_{0_2}) \in U$, $x_{0_3} \in V$ und $\forall\ (x_1, x_2) \in U$, $\forall\ x_3 \in V$

$$(x_1, x_2, x_3) \in S \Leftrightarrow x_3 = \phi(x_1, x_2)$$

(ii) $(x_{0_1}, x_{0_3}) \in U$, $x_{0_2} \in V$ und $\forall\ (x_1, x_3) \in U$, $\forall\ x_2 \in V$

$$(x_1, x_2, x_3) \in S \Leftrightarrow x_2 = \phi(x_1, x_3)$$

(iii) $(x_{0_2}, x_{0_3}) \in U$, $x_0 \in V$ und $\forall\ (x_2, x_3) \in U$, $\forall\ x_1 \in V$

$$(x_1, x_2, x_3) \in S \Leftrightarrow x_1 = \phi(x_2, x_3)$$

Der Tangentialraum von S an der Stelle x_0 ist definiert durch $T_{x_0}S = \{\xi \in \mathbb{R}^3 | \exists\ C^1$ Funktion $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3 : t \to x(t)$ so dass $x(t) \in S \quad \forall\ t$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \xi\}$

Bemerkung 1: Wenn in der Definition von glatter Fläche an der Stelle x_0 der 1. Fall vorliegt:

$$x_3(t) = \phi\big(x_1(t), x_2(t)\big)$$

Dann ist

$$\xi_3 = \dot{x}_3(0) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_{0_1}, x_{0_2})\xi_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x_{0_1}, x_{0_2})\xi_2$$

Zusammenfassend sind also drei Tangentialräume möglich in $\mathbb{R}^3$

1. Fall: $T_{x_0}S = \{\xi \in \mathbb{R}^3 | \xi_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_{0_1}, x_{0_2})\xi_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x_{0_1}, x_{0_2})\xi_2$
2. Fall: $T_{x_1}S = \{\xi \in \mathbb{R}^3 | \xi_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_{0_1}, x_{0_2})\xi_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x_{0_1}, x_{0_3})\xi_3$
3. Fall: $T_{x_2}S = \{\xi \in \mathbb{R}^3 | \xi_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x_{0_2}, x_{0_3})\xi_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x_{0_2}, x_{0_3})\xi_3$

Bemerkung 2: Der Tangentialraum T_xS an eine glatte Fläche in $\mathbb{R}^3$ ist stets ein 2dimensionaler linearer Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Satz 62: Sei $\Omega \in \mathbb{R}^3$ offen. Sei $F : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Sei $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von F. Sei

$$S := F^{-1}(c) = \{x \in \Omega | F(x) = c\}$$

Daraus folgt, S ist eine glatte Kurve und

$$\begin{aligned} T_{x_0}S &= \nabla F(x_0)^{\perp} \\ &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0)\xi_i = 0 \right\} \qquad\qquad \forall\ x_0 \in S \end{aligned}$$

Beweis: Sei c ein regulärer Wert, das heisst $x_0 \in S$, das heisst $\nabla F(x_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0), \frac{\partial F}{\partial x_3}(x_0)\right) \neq 0$. Das heisst, mindestens einer der drei Komponenten muss ungleich 0 sein. Wenn z.B. die dritte Komponente ungleich null ist, dann gilt nach dem Inversen Funktionen Satz $(x_1, x_2) \approx x$, $x_3 \approx y$. Analoges gilt wenn die anderen zwei Komponenten 0 sind.

$$F\big(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)\big) = C$$

Durch Ableiten ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_1}\big(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)\big) + \frac{\partial F}{\partial x_3}\big(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)\big)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} &= 0 \\ &= -\frac{\partial F/\partial x_1}{\partial F/\partial x_3}\xi_1 - \frac{\partial F/\partial x_2}{\partial F/\partial x_3}\xi_2\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3}\xi_3 = 0$$

Das heisst $\xi \perp \nabla F(x)$

Beispiel 9.38: $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1$

$$\begin{array}{rrcl} & \nabla F(x) & = & (2x_1, 2x_2, 2x_3) \\ \Rightarrow & \nabla F(x) & = & 0 \quad \forall\, x \in F^{-1}(1) \\ \Rightarrow & 1 & & \text{regulärer Wert von } F \\ \Rightarrow & S & := & F^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| = 1\} \text{ ist eine glatte Kurve}\end{array}$$

Wir verwenden

$$\begin{aligned}T_x S &= x^\perp \\ &= \{\xi \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle x, \xi\rangle = 0\}\end{aligned}$$

Beispiel 9.39: $F(x, y, z) = xy^2z^3 = 1$. $\nabla F(x, y, z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$, das heisst 1 ist regulärer Wert, das heisst

$$S := F^{-1}(1) \text{ ist eine glatte Kurve}$$

Wir suchen einen Vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ so dass folgendes gilt:

(i) $(x, y, z) \in S : xy^2z^3 = 1$
(ii) $(x, y, z) \perp T_{(x,y,z)}S$. Dies ist eine notwendige Bedingung, dass ein Punkt $(x, y, z) \in S$ den Abstand zum $(0, 0, 0)$ minimiert, unter allen Punkten auf S.

Wir wissen, dass $(x, y, z) \perp T_{(x,y,z)}S$ was wiederum $= \nabla F(x, y, z)^\perp$.
$\Leftrightarrow (x, y, z) \| \nabla F(x, y, z)$
$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ so dass

$$(*)\begin{cases} 1 &= xy^2z^3 \\ x &= \lambda y^2z^3 \\ y &= 2\lambda xyz^3 \\ z &= 3\lambda xy^2z^2 \end{cases}$$

$xy^2z^3 = 1$, aus $(*)$ folgt damit

$$x^2 = \lambda \quad y^2 = 2\lambda \quad z^2 = 3\lambda$$

Daraus folgt mit $\lambda \geq 0$

$$x = \pm\sqrt{\lambda} \quad y = \pm\sqrt{2\lambda} \quad z = \pm\sqrt{3\lambda}$$

Also

$$1 = \lambda^{\frac{1}{2}} 2\lambda(3\lambda)^{\frac{3}{2}}$$
$$\lambda^3 = 2^{-1}3^{-\frac{3}{2}}$$
$$\lambda = 2^{-\frac{1}{3}}3^{-\frac{1}{2}}$$

16. Extrema mit Nebenbedingungen

Frage: An welcher Stelle nimmt die Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

ihr Minimum an unter der Nebenbedingung

$$F(x,y,z) = xy^2z^3 = 1$$

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Weiter haben wir

$$F_1 : \Omega \to \mathbb{R} \quad \cdots \quad F_m : \Omega \to \mathbb{R}$$

Problem: Wir wollen $f(x)$ minimieren unter der Nebenbedingung

$$F_1(x) = c_1, \ldots, F_m(x) = c_m$$

Voraussetzung: Sei $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert der Funktion

$$F = (F_1, \ldots, F_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

Das heisst $\forall\, x \in \Omega$ und $F_1(x) = c_1, \ldots, F_m(x) = c_m$ gilt, die Gradienten

$$\nabla F_1(x), \ldots, \nabla F_m(x)$$

sind linear unabhängig.

Bemerkung: Wenn $(c_1, \ldots, c_m)$ ein regulärer Wert ist, dann folgt mit dem Inverse Funktionen Satz

$$S = F^{-1}(c) = \{x \in \Omega | F_1(x) = c_1, \ldots, F_m(x) = c_m\}$$

ist eine *glatte Fläche* der Dimension $n - m$ und

$$T_{x_0}S = \{\xi \in \mathbb{R}^n | \xi \perp \nabla F_i(x_0) \quad i = 1, \ldots, m\}$$

Wenn wir ein Punkt x haben, der die Funktion minimiert, dann gilt folgender Satz

Satz 63: Falls $x \in S$ ein lokales Minimum von f unter der Nebenbedingung $F_i(x) = c_1$ ist, so gilt

$$\nabla f(x_0) \perp T_{x_0}S$$

Beweis: Sei $\xi \in T_{x_0}S$. Wir müssen zweigen, das ξ orthogonal zum Gradienten von f ist, das heisst $\exists\, (-\varepsilon, \varepsilon) \to S : t \mapsto x(t)$ so dass aus $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \xi$ Es soll

$$f\big(x(t)\big) \geq f\big(x(0)\big)$$

Notwendigerweise ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(x(t)\big)\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\xi_i \\ &= \langle \nabla f(x_0), \xi \rangle \end{aligned}$$

Ausserdem ist $\nabla f(x_0) \perp T_{x_0}S$ also

$$T_{x_0}S = \{\xi | \xi \perp \nabla F_1(x_0), \ldots, \nabla F_m(x_0)\}$$

$\nabla f(x_0) \perp T_{x_0} S \Leftrightarrow \nabla f(x_0)$ ist linear abhängig von $\nabla F_1(x_0), \ldots, \nabla F_m(x_0)$

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0) &= \lambda_1 \nabla F_1(x_0) + \cdots + \lambda_m \nabla F_m(x_0) \\ F_1(x_0) &= c_1 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ F_m(x_0) &= c_m \end{aligned}$$

Wir haben also $n+m$ Gleichungen mit $n+m$ Variablen $x_0 = (x_{0_1}, \ldots, x_{0_m})$. Die λ_i nennen wir *Lagrange Multiplikatoren*

17. Zusammenfassung

1 Die partielle Ableitung ist definiert durch

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x)}{h}$$

2 Falls eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben ist als $z = f(x,y)$, und $x = x_0 + t\xi$, $y = y_0 + t\eta$, dann ist

$$E_0 = \left\{ (\xi, \eta, \vartheta) \middle| \vartheta := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(x_0 + t\xi, y_0 + \eta \right\}$$

die Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0)

3 Die Ableitung von f an der Stelle von x in Richtung $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als der Grenzwert

$$df(x)\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f} f(x + t\xi)\bigg|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\xi) - f(x)}{h}$$

oder

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \xi_i$$

4 Die Jacobimatrix einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wird eindeutig beschrieben durch

$$Df(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

5 Die Richtungsableitung ist gegeben durch $Df(x)\xi$, wobei $Df(x)$ die Jacobimatrix und ξ der Richtungsvektor sind.

6 f heisst differenzierbar an der Stelle x, falls eine Matrix A existiert, so dass

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{|f(x + \xi) - f(x) - A\xi|}{|\xi|} = 0$$

A nennen wir die Ableitung von f an der Stelle x. Die Ableitung entspricht gerade der Jacobimatrix $Df(a) = A$.

7 Ist f an der Stelle x differenzierbar, so existieren auch die Richtungsableitungen, die Umkehrung gilt jedoch nicht.

8 Stetig differenzierbar heisst, alle partiellen Ableitungen existieren und sind stetig. Zweimal stetig differenzierbar heisst entsprechend f ist zweimal ableitbar und stetig.

9 Die Kettenregel lautet

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg\big(f(x_0)\big) \cdot Df(x_0)$$

10 Falls f zweimal stetig differenzierbar ist gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

was entsprechend auch für n mal stetig differenzierbare Funktionen gilt.

11 f heisst zweimal stetig differenzierbar, wenn f stetig differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ebenfalls stetig differenzierbar ist für $i = 1, \dots, n$.
f ist C^1 bedeutet, f ist stetig differenzierbar, f ist C^2 bedeutet, f ist zweimal stetig differenzierbar, etc.

12 Die höchste Ableitung von Potenzfuktionen, die nicht 0 ist, ist gegeben durch

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial {x_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial {x_n}^{k_n}}(x) = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$$

13 Der Taylorpolynom von f an der Stelle x mit Ordnung l ist

$$\left(T_x^l f\right)(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq l} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \xi^\alpha$$

14 Für den Taylorpolynom der Ordnung 2 gilt die Ungleichung

$$\left| f(x+\xi) - f(x) - \mathrm{d}f(x)\xi - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(x)(\xi,\xi) \right| \leq c\,|\xi|^3 \qquad f \in C^3$$

15 Die Hessesche Normalform wird definiert als:

$$\mathrm{d}^2 f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

16 Ein Punkt $x \in \Omega$ heisst lokales Minimum [Maximum] von f, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$

$$|y - x| < \varepsilon \Rightarrow y \in \Omega \text{ und } f(y) \geq [\leq] f(x)$$

17 Der Gradient $\nabla f(x)$ ist definiert durch

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

wobei $f \in \mathbb{R}^n$

18 Die zweite Ableitung ist definiert durch

$$\mathrm{d}^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

19 Eine Matrix A heisst positiv [negativ] definiert, falls $\langle \xi, A\xi \rangle > 0$ $[\langle \xi, A\xi \rangle < 0]$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$

20 Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heisst kritischer Punkt von $f \in C^1$, falls $\nabla f(x) = 0$.

21 Ist x ein kritischer Punkt von f und $\mathrm{d}^2 f(x)$ positiv definiert, so ist x ein lokales Minimum von f

22 Die Matrix $\mathrm{d}^2 f(x,y)$ ist genau dann positiv definiert, wenn gilt
(i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$
(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$, dass heisst, $\det(\mathrm{d}^2 f) > 0$

23 Der Mittelwertsatz für höhere Dimensionen lautet

$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|$$

24 Ist $\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)$ weder positiv noch negativ definiert, nennt man x_0, y_0 Sattelpunkt.

25 Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die symmetrische Jacobi Matrix, dann existiert ein $\phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so dass $\phi^T A \phi$ eine Diagonalmatrix ist. Dabei gilt

keine	0en	nur	1en	=	Minimum
keine	0en	nur	−1en	=	Maximum
keine	0en	gemischt	−1en und 1en	=	Sattelpunkt

26 Ein Punkt x wird *nicht degeneriert* genannt, falls keine Nullen in der Diagonalform auftreten, d.h. $\det\big(d^2 f(x)\big) \neq 0$

27 Mit $\mu_f(x) =$ Anzahl -1en in der Diagonalform bezeichnen wir den Index des kritischen Punktes x von f.

28 Seien U,$V \in \mathbb{R}^n$ zwei offene Mengen. Eine Abbildung $f : U \to V$ heisst C^1 Diffeomorphismus, wenn gilt:
(1) f ist bijektiv
(2) f ist stetig differenzierbar
(3) f^{-1} ist stetig differenzierbar

29 Eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ in $\mathbb{R}^m$ heisst *Cauchyfolge*, wenn sie folgende Bedingung erfüllt: $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k, l \in \mathbb{N}$

$$k, l \geq k_0 \Rightarrow |x_k - x_l| < \varepsilon$$

30 Jede Cauchyfolge konvergiert in $\mathbb{R}^n$.

31 Ein metrischer Raum (X, d) mit $d : X \times X \to [0, \infty)$ erfüllt folgende Eigenschaften:
(1) $d(x,y) = d(y,x)$
(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

32 Ein metrischer Raum X_d heisst vollständig oder Banachraum, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

33 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to X$ heisst *Kontraktion*, wenn es eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $0 \leq \alpha \leq 1$ und $\forall\, x, y \in X$

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq \alpha d(x,y)$$

34 Banachscher Fixpunktsatz: Ist (X, d) ein nicht leerer, vollständig metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion, dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

35 Für die Ableitung einer implizit definierten Funktion gilt folgendende Ableitungsregel

$$\phi'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\big(x,\phi(x)\big)}{\frac{\partial f}{\partial y}\big(x,\phi(x)\big)}$$

36 Abgekürzt schreiben für die

$$f : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$$

$$df(x,y) = \Big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big)$$

37 Eine Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^2$ heisst *glatte Kurve* wenn es für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in$ zwei offene Intervalle $U, V \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ und eine der folgenden Aussagen gilt
(1) $\exists\, C^1$ Funktion $\phi : U \to V$ so dass $(x,y) \in C \cap (U \times V) \Leftrightarrow y = \phi(x)$
(2) $\exists\, C^1$ Funktion $\psi : V \to U$ so dass $(x,y) \in C \cap (U \times V) \Leftrightarrow x = \psi(y)$

38 Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion. Eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ heisst regulärer Wert von f wenn $\forall\, x \in \Omega$ folgendes gilt

$$f(x) = C \Rightarrow \nabla f(x) \neq 0$$

39 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion. Falls $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f ist, so ist die Menge $f^{-1}(c) = \{(x,y) \in \Omega | f(x,y) = c\}$ eine glatte Kurve

40 Der Tangentialraum einer glatten Kurve C an der Stelle z_0 ist definiert durch

$$T_{z_0}C = \left\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0,y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\eta = 0\right\}$$

41 Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heisst glatte Fläche, wenn es für jeden Punkt $x_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, x_{0_3}) \in S$ zwei offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^2$, $V \subset \mathbb{R}$ und eine C^1-Funktion $\phi : U \to V$ gibt so dass $(x_{0_1}, x_{0_2}) \in U$, $x_{0_3} \in V$ und $\forall\, (x_1, x_2) \in U$, $\forall\, x_3 \in V$

$$(x_1, x_2, x_3) \in S \Leftrightarrow x_3 = \phi(x_1, x_2)$$

oder sinngemäss die zwei anderen Kombinationen

42 Der Tangentialraum von S an der Stelle x_0 ist definiert durch

$$T_{x_0}S = \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0)\xi_i = 0\right\} \qquad \forall\, x_0 \in S$$

43 Falls $x \in S$ ein lokales Minimum von f unter der Nebenbedingung $F_i(x) = c_1$ ist, so gilt

$$\nabla f(x_0) \perp T_{x_0}S$$

KAPITEL 10

Mehrfach Integrale

1. Grundbegriffe

[V41-310502] Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $f : B \to \mathbb{R}$ eine Funktion

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_n = ?$$

Beispiel 10.1: Sei $Q = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ ein *offener Quader*, was wir auch als $Q(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n | a_j < x_j < b_j\}$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $a_j < b_j$ schreiben können. Sei nun $B = Q(a, b)$, $f(x) = 1$ dann gilt

$$\begin{aligned}\int_Q 1\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Vol}_n(Q) \\ &= \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)\end{aligned}$$

Sei $\overline{Q} = \overline{Q}(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n | a_j \le x_j \le b_j\}$ der *Abschluss von* Q, im Gegensatz zur offenen Menge des Beispiel 10.1. Ausserdem definieren wir den *Rand von* $Q := \partial Q := \overline{Q} \backslash Q$, $\partial Q = \{x \in \mathbb{R}^n | a_j \le x_j \le b_j \forall\, j, x_i = a$ oder b für ein $i\}$. Das *Oberflächenvolumen* von ∂Q ist definiert durch

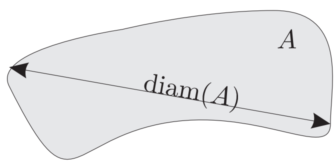
$$\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial Q) = 2 \sum_{j=1}^n \prod_{i \ne j} (b_i - a_i)$$

Beispiel 10.2: Sei $n = 3$

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_3(Q) &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) \\ \mathrm{Vol}_2(\partial Q) &= 2(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) + 2(b_1 - a_1)(b_3 - a_3) + 2(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\end{aligned}$$

Ein weiterer wichtiger Begriff um die Partition zu verstehen, ist der *Durchmesser von* Q. Der Durchmesser einer beliebigen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ schreiben wir wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathrm{diam}(A) &= \sup_{x,y \in A} |x - y| \\ &= \sqrt{(b_i - a_i)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}\end{aligned}$$



Nun haben wir die Begriffe, die wir zur Partition brauchen. Sei $B = [-\mathbb{R}, \mathbb{R}]^n$

Definition: Eine *Partition* B ist eine endliche Folge

$$P = (P_1, \ldots, P_k$$

von offene Quadern, so dass

(i) $B = \bigcup_{i=1}^k \overline{P_i}$
(ii) $P_i \cap P_j = \emptyset \forall\, i \ne j$

Die Menge aller Partitionen von B bezeichnen wir mit $\wp(B)$. Nun kann man vorgehen, wie im eindimensionalen Raum. Wir bilden wieder die Obersumme und die Untersumme. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für $P \in \wp(B)$ definieren wir die *Untersumme* durch

$$\underline{S}(t, P) = \sum_{i=1}^{k} \inf_{\overline{P_i}} f \cdot \mathrm{Vol}_n(P_i)$$

und analog die *Obersumme* durch

$$\overline{S}(t, P) = \sum_{i=1}^{k} \sup_{\overline{P_i}} f \cdot \mathrm{Vol}_n(P_i)$$

Lemma 36: $\forall\, f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\forall\, P, Q \in \wp(B)$

$$\underline{S}(t, P) \le \overline{S}(t, Q)$$

Beweis: $P \wedge Q = \{P_i \cap Q_j | i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l\} \in \wp(B)$ $P = (P_1, \dots, P_k)$, $Q = (Q_1, \dots, Q_l)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, P) &\le \underline{S}(f, P \wedge Q) \\ &\le \overline{S}(f, P \wedge Q) \\ &\le \overline{S}(f, Q) \qquad \square \end{aligned}$$

Definition: $B = [-\mathbb{R}, \mathbb{R}]$, eine beschränkte Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ heisst *Riemann integrierbar*, wenn

$$\sup_{P \in \wp(B)} \underline{S}(f, P) = \inf_{Q \in \wp(B)} \overline{S}(f, Q)$$

In diesem Fall ist das Integral von f definiert durch

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x_i \cdots \mathrm{d}x_n := \sup_{P \in \wp(B)} \underline{S}(f, P)$$

Für das *Korn* $\delta(P)$ einer Partition $P = (P_1, \dots, P_n) \in \wp(B)$ gilt:

$$\delta(P) := \max_{1 \le i \le k} \mathrm{diam}(P_j)$$

Intuitiv sollte gelten

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x_1 \cdots x_n = \lim_{\substack{\delta(P) \to 0 \\ x_i \in \overline{P_i}}} \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\,\mathrm{Vol}_n(P_i)$$

Satz 64: Sei $B = [-\mathbb{R}, \mathbb{R}]^n$, $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $c \in \mathbb{R}$ ein reeller Punkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(i) f ist Riemann integrierbar und $c = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x_i \cdots \mathrm{d}x_n$
(ii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_0 > 0\ \forall\, P \in \wp(B)$ gilt

$$\delta(P) < \delta_0 \Rightarrow \left| c - \sum_{i=1}^{k} f(x)\,\mathrm{Vol}_n(P_i) \right| < \varepsilon \qquad\qquad x_i \in \overline{P_i}$$

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i) : Wir nehmen an, dass f (ii) erfüllt. Zu zeigen: $\sup \underline{S}_{P \in \wp(B)}(f, P) = c$ und $\inf_{P \in \wp(B)} \overline{S}(f, P) = c$

(i) $\boxed{\underline{S}(f, P) \le c}$ $\forall\, P \in \wp(B)$. Sei $P \in \wp(B)$ und $\varepsilon > 0$ Sei $\delta_0 > 0$ wie in (ii). Wähle ein $Q \in \wp(B)$ so dass $\delta(Q) < \delta_0$. Sei $P \wedge Q =: (S_1, \dots, S_N)$. Sei $x_i \in S_i$, $i = 1, \dots, N$. Aus

(ii) folgt , da $\delta(P \wedge Q) \leq \delta(Q) < \ \delta_0$ gilt

$$c - \varepsilon < \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \operatorname{Vol}(S_i) < c + \varepsilon$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, P) &\leq \underline{S}(f, P \wedge Q)\\ &= \sum_{i=1}^{N} \inf_{\overline{S}} f \cdot \operatorname{Vol} S_i\\ &\leq \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \operatorname{Vol}(S_i) < c + \varepsilon\end{aligned}$$

Daraus folgt $\underline{S}(f, P) < c + \varepsilon \ \forall \ \varepsilon > 0$

(ii) $\boxed{\sup_{P \in \wp(B)} \underline{S}(f, P) \geq c}$ Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und sei $x_0 > 0$ wenn (ii). Wähle $P \in \wp(B)$ so dass $\delta(P) < \delta_0$. Wähle $x_i \in \overline{P_i}$, so dass

$$f(x_i) \leq \inf_{\overline{P_i}} f + \frac{\varepsilon}{\operatorname{Vol}_n(B)}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, P) &= \sum_{i=1}^{k} \inf_{\overline{P_i}} f \operatorname{Vol}_n(P)\\ &\geq \sum_{i=1}^{k} \left(f(x_i) - \frac{\varepsilon}{\operatorname{Vol}(B)} \right) \operatorname{Vol}(P_i)\\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} f(x_i) \operatorname{Vol}(P_i)}_{>c-\varepsilon} - \underbrace{\frac{\varepsilon}{\operatorname{Vol}(B)} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Vol}(P_i)}_{\varepsilon}\\ &> c - 2\varepsilon\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt: $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ P \in \wp(B)$ so dass

$$\underline{S}(f, P) > c - 2\varepsilon \Rightarrow \sup_{P \in \wp} \underline{S}(f, P) \geq c$$

Lemma 37: [V42-030602] Seien $P, Q \in \wp(B)$ und $M = \sup_{x \in B} |f(x)|$ dann gilt

$$\begin{aligned}&\underline{S}(f, P) \geq \underline{S}(f, Q) - 4M \operatorname{Vol}_{n-1}(\partial Q) \delta(P)\\ &\overline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q) - 4M \operatorname{Vol}_{n-1}(\partial Q)\end{aligned}$$

Beweis: Sei $P = (P_1, \ldots, P_k)$ und $Q = (Q_1, \ldots, Q_l)$. Sei weiter $I_0 = \{i \in \{1, \ldots, L\} | \overline{P}_l \cap \partial Q \neq 0\}$ wobei $\partial Q := \bigcup_{j=1}^{l} \partial Q_j$. Wie gross ist das Volumen?

$$\sum_{i \in I_0} \operatorname{Vol}_n(P_i)$$

Jeder Punkt in P_i, $i \in I_0$ hat einen Abstand von höchstens $\delta(P)$ zum Rand Q. Das heisst, $\sum \operatorname{Vol}_n(P_i) \leq 2 \operatorname{Vol}(\partial Q) \delta(P)$

$$h_c^{\pm} := \begin{cases} \inf_{\overline{P}_i}, & i \notin I_0 \\ \pm M, & i \in I_0 \end{cases}$$

Das heisst

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(h_i^1 - h_i^-)\operatorname{Vol}_n(P_i) &= \sum_{i\in I} 2M\operatorname{Vol}_n(P_i)\\ &\le 4M\operatorname{Vol}_{n-1}(\partial Q)\delta(P)\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{k}\inf_{\overline{P}_i} f\operatorname{Vol}_n(P_i)\\ &\ge \sum_{i=1}^{k} h_i^- \operatorname{Vol}_n(P_i) - 4M\operatorname{Vol}_{n-1}\partial Q\delta(P)\\ &\ge \underline{S}(f,P\cap Q) - 4M\operatorname{Vol}_{n-1}\partial Q\delta(P)\end{aligned}$$

wobei

$$\sum_{i=1}\frac{\inf f}{P_i\cap Q_i}\operatorname{Vol}(P_i\cap Q_i) \le \sum_{i=1}^{k} h_i^+\operatorname{Vol}(P_i)$$

$\Rightarrow \underline{S}(f,P) \ge \underline{S}(f,Q) - 4\operatorname{Vol}_{n-1}(\partial Q)\delta(P)$

Beweis (Satz ??): „$(i\to ii)$“ Gegeben sei $\varepsilon > 0$

(1) Wähle $Q \in \wp(B)$ so dass

$$c - \frac{\varepsilon}{2} \le \underline{S}(f,Q) \le \overline{S}(f,Q) \le c + \frac{\varepsilon}{2}$$

dies gilt weil $\sup \underline{S}(f,Q) = c$ und $\inf \overline{S}(f,P) = c$. Das heisst, $\exists\, Q$ so dass $\underline{S}(f,Q) \ge c - \frac{\varepsilon}{2}$ und $\exists\, P$ so dass $\overline{S}(f,P) \le c + \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus folgt

$$\underline{S}(f,P\cap Q) \ge \underline{S}(f,Q) \ge c - \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\overline{S}(f,P\cap Q) \le \overline{S}(f,Q) \le c + \frac{\varepsilon}{2}$$

(2) Wähle $\delta_0 > 0$ so dass $AM\operatorname{Vol}_{n-1}(\partial Q)\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $P = (P_1,\dots,P_k) \in \wp(B)$ so dass $\delta(P) < \delta_0$ und $x_i \in \overline{P_i}$ dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} f(x_i)\operatorname{Vol}_n(P_i) &\ge \sum_{i=1}^{k}\inf_{\overline{P_i}} f\operatorname{Vol}_n(P_i)\\ &= \underline{S}(f,P)\\ &\le \underline{S}(f,Q) - 4M\operatorname{Vol}_{n-1}(\partial Q)\delta(P)\end{aligned}$$

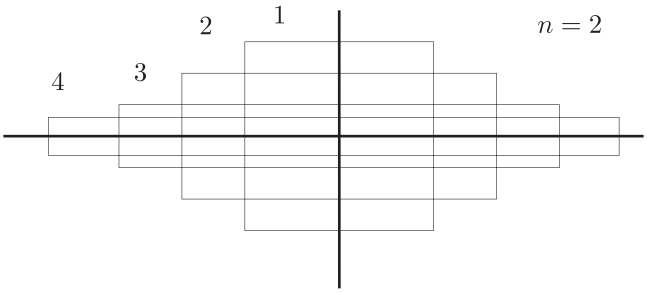
Da $\delta(P) < \delta_0$

$$\begin{aligned}&> \underline{S}(f,P) - \underbrace{4M\operatorname{Vol}_{n-1}(\partial Q)\delta_0}_{<\frac{\varepsilon}{2}}\\ &> \underline{S}(f,Q)\frac{\varepsilon}{2}\\ &\ge c - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = c - \varepsilon\end{aligned}$$

Genauso zeigt man

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i)\operatorname{Vol}_n(P_i) < c + \varepsilon$$

Satz 65: Grundregeln des Integrals: Sei $B = [-R,R]^n$ beschränkt und $f,g : B \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar. Ausserdem ist $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt



(1) $f + g$ ist Riemann integrierbar und
$$\int_B \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x + \int_B g(x)\,\mathrm{d}x$$
(2) λf ist Riemann integrierbar und
$$\int_B \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_B f(x)\,\mathrm{d}x$$
(3) Wenn $f(x) \leq g(x)\ \forall\, x \in B$ dann gilt
$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_B g(x)\,\mathrm{d}x$$

[V43-070602] Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst *Nullmenge* wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Quader Q_1, Q_2, Q_3, $\dots$ gibt, so dass
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$$
und
$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_i) \leq \varepsilon$$

Bemerkung:

(1) $\mathbb{R}^{n-1} \times 0$ ist eine Nullmenge.

$Q_k = (-k, k)^{n-1} \times (-\varepsilon_k, \varepsilon_k)$ $\qquad k = 1,\ k = 2, \dots$

Siehe Abbildung

$\mathrm{Vol}(Q_k) = (2k)^{n-1} \cdot 2\varepsilon_k$

wähle ε_1, ε_2, $\dots$

$(2k)^{n-1} 2\varepsilon_k = 2^{-k}\varepsilon$

(2)
$$\left.\begin{array}{r} A \text{ Nullmenge} \\ B \subset A \end{array}\right\} B \text{ Nullmenge}$$

(3) $A_1, A_2, A_3, \dots$ Nullmengen, dann gilt

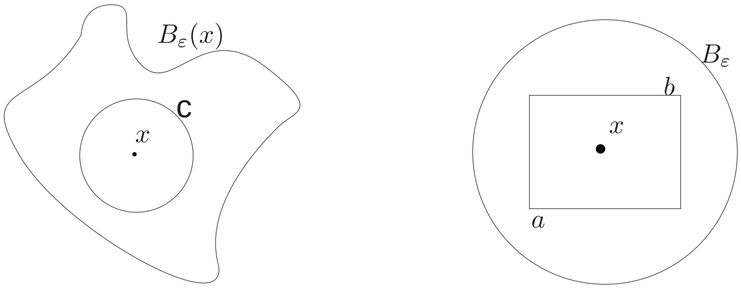
$A := \cup_{i=1}^{\infty} A_i$

ist eine Nullmenge

(4) Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge

(5) A heisst *abzählbar*, wenn es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to A$ gibt. Sei $a_i := f(i)$, dann ist

$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$



(a) $x \in \mathrm{int}(A)$ (b) Beweis

(6) Da endlich viele Quader in der Definition eigentlich nicht zugelassen sind, fügt man gegebenenfalls noch unendlich viele leere Quader hinzu.

Beispiel 10.3: $A = \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \dots, n\}$ ist abzählbar, also Nullmenge

Eine offene Menge ist keine Nullmenge, was aber nicht einfach zu sehen und nur über einen Trick zu zeigen ist.

Definition: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Das *innere von* A ist die Teilmenge von A

$$\mathrm{int}(A) = \mathring{A} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{A} | \exists\, \varepsilon > 0 \text{ so dass } \mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x}) \subset \mathrm{A}\}$$

Lemma 38: Sei A eine Nullmenge, dann gilt

$$\mathrm{int}(A) = \emptyset$$

Beweis: Annnahme, $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists\, x \in A,\ \varepsilon > 0, \text{ so dass } B_\varepsilon(x) \subset A$$
$$\Rightarrow \exists\, a = (a_1, \dots, a_n),\ b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n\ a_i < b_i\ \forall\, i \text{ und } Q'(a, b) \subset A$$

BEHAUPTUNG: Q_1, Q_2, … offene Quader

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_k) \geq \mathrm{Vol}(Q) > 0$$

also ist A keine Nullmenge.

Beweis: $Q_k = Q(a^k, b^k)$, $a^k = (a_1^k, \dots, a_n^k)$, $b^k = (b_1^k, \dots, b_n^k)$. $\overline{Q} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ komplett. $\exists\, N$ so dass

$$\overline{Q} \subset \bigcup_{k=1}^{N} Q_k$$

$$(Q \cap \mathbb{Z}^n) \geq \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i - 1)$$

falls $b_i - a_i > 1$

$$\#(Q_k \cap \mathbb{Z}^n) \geq \prod_{i=1}^{N} (b_i^k - a_i^k + 1)$$

Daraus folgt falls $b_i - a_i > 1$

0 1/4 2/9 1/3 2/3 7/9 8/9 1

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{N}(b_i - a_i - 1) &\geq \#(Q \cap \mathbb{Z}^n) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N}(Q_k \cap \mathbb{Z}^n) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N}\prod_{i=1}^{N}(b_i^k - a_i^k + 1)
\end{aligned}
$$

genauso mit $\lambda Q \subset \bigcup_{A=i}^{N} \lambda Q_k$. Falls $\lambda(b_i - a_i) > 1$

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{N}(\lambda b_i - \lambda a_i - 1) &\leq \#(\lambda Q \cap \mathbb{Z}^n) \\
&\leq \sum \#(\lambda Q_k \cap \mathbb{Z}^n) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}\prod_{i=1}^{N}(\lambda b_i^k - \lambda a_I^k + 1)
\end{aligned}
$$

$$
\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i - \frac{1}{\lambda}) \leq \sum_{k=1}^{N}\prod_{i=1}^{n}(b_I^k - a_i^k + \frac{1}{\lambda})
$$

$\lambda \to \infty$

$$
\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \sum_{k=1}^{N}\underbrace{\prod_{i=1}^{n}(b_i^k - a_i^k)}_{\mathrm{Vol}(Q_k)}
$$

Beispiel 10.4: $C \subset [0,1]$ Cantormenge

$$
C = [0,1] \backslash \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \cdots \right\}
$$

- C ist kompakt
- C ist überabzählbar
- C ist eine Nullmenge

Beispiel 10.5:

$$
C \subset \underbrace{\left[0, \frac{1}{3}\right]}_{Q_1} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3}, 1\right]}_{Q_2} \qquad \mathrm{Vol}(Q_1) + \mathrm{Vol}(Q_2) = \frac{2}{3}
$$

$$
C \subset \underbrace{\left[0, \frac{1}{9}\right]}_{Q_1} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]}_{Q_2} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]}_{Q_3} \cup \underbrace{\left[\frac{8}{9}, 1\right]}_{Q_4} \qquad \sum_{i=1}^{4} \mathrm{Vol}(Q_j) = \frac{4}{9}
$$

$C \subset 8$ Intervalle der Länge $\frac{1}{27}$ $\qquad \sum \mathrm{Vol}(Q_j) = \frac{8}{27}$

Wir können C überdecken durch 2^n Intervalle $Q_1, \ldots, Q_{2^n}$ der Länge 3^{-n}

$$\sum_{i=1}^{2^n} \mathrm{Vol}(Q_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Satz 66: Sei $B = [-R, R]^n$ und $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) f ist Riemann integrierbar
(ii) Die Menge $A(f)$ aller Punkte $x \in B$, an denen f unstetig ist, ist eine Nullmenge

Beispiel 10.6: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| = 1\}$ ist eine Nullmenge

$$f(x) := \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$A(t) = S^{n-1}$ ist eine Nullmenge

$B_1 := \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| \leq 1\}$

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \mathrm{Vol}(B_1) \qquad\qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_1 \\ 0, & x \notin B_1 \end{cases}$$

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Die *charakteristische Funktion* von A ist

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Definition: Der *Rand von A* ist die Menge

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall \, \varepsilon > 0 \text{ gilt } B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset, B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \backslash A) \neq \emptyset\}$$

Bemerkung: χ_A ist stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $x \notin \partial A$

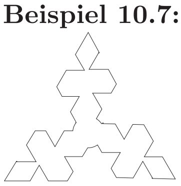
Korollar 18: Falls $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge ist, so dass ∂A eine Nullmenge ist, dann gilt χ_A ist Riemann integrierbar.

Definition: Für das Volumen, oder auch das *Mass* gilt

$$\mathrm{Vol}(A) = \mu(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) \, \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$$

Wir nehmen ein sehr grosses Gebiet das A enthält, dann spielt es keine Rolle über welchen Intervall wir integrieren.

Beispiel 10.7: $A \subset \mathbb{R}^n$



∂A Nullmenge, ∂B Nullmenge, $A \cap B = \emptyset$, dann gilt

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \int \chi_{A \cup B}(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int \big(\chi_A(x) + \chi_B(x)\big) \, \mathrm{d}x \\ &= \int \chi_A(x) \, \mathrm{d}x + \int \chi_B(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

Korollar 19: $f : B = [-R, R]n \to \mathbb{R}$ beschränkt. Falls f Riemann integrierbar ist dann ist $|f|$ auch Riemann integrierbar und

$$\left|\int_B f(x)\,\mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_n\right| \leq \int_B |f(x)|\,\mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_n$$

Beweis: f stetig an der Stelle x, dann ist $|f|$ stetig an der Stelle x.

$$A(|f|) \subset A(f)$$

Das heisst, die Unstetigkeitsmenge ist Untermenge der Nullmenge.

Satz 67: [V44-100602] Sei $B^n = [a, b]^n$, $f : B^n \to \mathbb{R}$ stetig. Für ein $x_n \in [a, b]$ definiere $f_{x_1} : B^{n-1} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_{x_1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) := f(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

Daraus folgt

(1) Die Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$x_n \mapsto \int_{B^{n-1}} f_{x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1})\,\mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_{n-1}$$

ist stetig

(2) Ausserdem gilt

$$\int_{B^n} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_n = \int_a^b \left(\int_{B^{n-1}} f(x_1, \ldots, x_{n-1})\,\mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_{n-1}\right) \mathrm{d}x_n$$

Korollar 20 (Satz von Fubini): Sei $f : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_a^b \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$$

Bemerkung: Die Aussage 2 in Satz 67 gilt auch unter der Voraussetzung dass:

- Die Funktion $f_{x_1} : B^{n-1} \to \mathbb{R}$ ist Riemann integrierbar für jedes x_n
- Die Funktion $\int x_n \mapsto \int_{B^{n-1}} f_{x_1}$ ist Riemann integrierbar.

Beispiel 10.8: $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq y \leq 1$

Definition: Sei

$$(f\xi_A)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, falls } x \in A \\ 0 & \text{, falls } x \notin A \end{cases}$$

Unter diesen Voraussetzungen definieren wir

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_n := \int_{\mathbb{R}^n} f\xi_A(x)\,\mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_n$$

Satz 68 (Substitutionsregel): Seien $\Omega, \Omega' \in \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : \Omega \to \Omega'$ ein Diffeomorphismus, $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ lokal Riemann integrierbar, $A \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge, ∂A eine (Rand) Nullmenge. Dann gilt: $f \circ \phi$ ist lokal Riemann integrierbar und $\partial\phi(A) = \phi(\partial A)$ ist eine Nullmenge.

$$\int_{\phi(A)} f(y_1, \ldots, y_n)\,\mathrm{d}y_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}y_n = \int_A f\big(\phi(x_1, \ldots, x_n)\big) \cdot |\det \mathrm{d}\phi(x_1, \ldots, x_n)|\,\mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_n$$

Beweis (Idee): Sei $n = 3$, $\Omega = \Omega' = \mathbb{R}^3$, $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x_i \leq 1\}$, $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear. $\phi(x) = \theta_x \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Seien $e_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $e_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$. $\theta e_1 = \nu_1 \in \mathbb{R}^3$, $\theta e_2 = \nu_2 \in \mathbb{R}^3$, $\theta e_3 = \nu_3 \in \mathbb{R}^3$

$$\phi(Q) = \left\{\frac{3}{2} x_i \nu_i | 0 \leq x_i \leq 1\right\}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}\big(\phi(Q)\big) &= |\langle \nu_1 \times \nu_2 \times \nu_3\rangle| \\ &= |\det(\nu_1, \nu_2, \nu_3)| \\ &= |\det\theta|\end{aligned}$$

Beispiel 10.9: $\operatorname{Vol}\big(\phi(A)\big) = \int_A \big|\det(\mathrm{d}\phi(x))\big| \, \mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_n$ Sei

$$Q = [x_1, x_1 + \delta x_1] \times [x_2, x_2 + \delta x_2] \times \cdots \times [x_n, x_n + \delta x_n]$$

für das Volumen gilt dann

$$\operatorname{Vol}(Q) = \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \ldots \cdot \delta x_1$$

$$\operatorname{Vol}\big(\phi(Q)\big) = \big|\det\big(\mathrm{d}\phi(x)\big)\big| \, \delta x_1 \cdot \ldots \cdot \delta x_n$$

$$P = (P_1, \ldots, P_k) \in \gamma(A)$$

$(x_1 \in P_1, \ldots, x_k \in P^k) \subset \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{k} f\big(\phi(x_i)\big) \, |\det \mathrm{d}\phi(x_i)| \operatorname{Vol}(P_i) \cong \sum f(y_1) \operatorname{Vol}\big(\phi(P_i)\big)$$

daraus folgt

$$\int_A f_0 \phi(x) \, |\det \mathrm{d}\phi(x)| \, \mathrm{d}x = \int_{\phi(A)} f(y) \, \mathrm{d}y$$

2. Polorkoordination

[V45-140602] Zwischen kartesischen- und Polarkoordinaten bestehen die Beziehungen $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $(x, y) = \phi(r, \theta)$. Bilden wir die Ableitung von $\phi(r, \theta)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{2\times 2} \ni \mathrm{d}\phi(r, \theta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Woraus folgt

$$\det\big(\mathrm{d}\phi(r, \theta)\big) = r$$

Nach der Substitutionregel gilt: $\phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \supset A \to \mathbb{R}^2$

$$\int_{\phi(A)} f(x, y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_A f \circ \phi(r, \theta) r \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

$A \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi]$

Beispiel 10.10: Sei $A = \underbrace{[0, R]}_{r} \times \underbrace{[0, 2\pi]}_{\theta}$ und

$$\phi(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \mathbb{R}^2\}$$

also der abgeschlossene Ball vom Radius R. Was ist nun

$$\int_{x^2+y^2 \leq \mathbb{R}^2} f(x, y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?$$

Nach dem Satz von Fubini (20) gilt

$$= \int_0^{R^2} \int_0^{2\pi} f \circ \phi(r, \theta) r \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

Setzen wir zum Beispiel $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ und rechnen

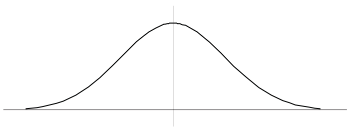
$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2\leq\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\ &= 2\pi\int_0^R re^{-r^2}\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Wir substituieren $r^2 = s$, $\Rightarrow 2r\mathrm{d}r = \mathrm{d}s$

$$\begin{aligned}&= \pi\int_0^{R^2} e^{-s}\,\mathrm{d}s\\ &= \pi(1-e^{-R^2})\end{aligned}$$

Wollen wir die Integration auf ganz $\mathbb{R}$ ausweiten, müssen wir nur noch den Limes bilden

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \lim_{R\to\infty}\int_{x^2+y^2\leq\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \lim_{R\to\infty}\pi(1-e^{-R^2}) = \pi\end{aligned}$$



Rechnen wir das Ganze ohne Polarkoordinaten so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \pi\end{aligned}$$

Woraus wir für das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

erhalten.

Sei $x = (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $x^2 = x_1^2+\cdots+x_n^2$ dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,\mathrm{d}x_1\cdot\ldots\cdot\mathrm{d}x_n$$

zu verstehen als ein Integral über einem beschränkten Ball, dessen Radius $\to\infty$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2}e^{-x_2^2}\cdot\ldots\cdot e^{-x_n^2}\,\mathrm{d}x_1\cdot\ldots\cdot\mathrm{d}x_n\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^n\\ &= \pi^{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

Wenn wir versuchen, Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^n$ zu bilden, wird's schwierig. Es ist aber auch nicht immer zwingend notwendig, denn die Norm im Quadrat, $|x|^2$, entspricht gerade R^2. Wir integrieren also über einer Sphäre.

$$\begin{aligned}\pi^{\frac{n}{2}} &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2}\,\mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_n \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{|x|=r} e^{-r^2}\right)\mathrm{d}r \\ &= \int_0^\infty e^{-r^2}\,\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\{|x|=r\}\right)\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Was der Höhe mal Grundfläche entspricht. Es gilt $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| = 1\}$ und $\mathrm{Vol}_{n-1}(\{x\} = 1) = r^{n-1}\,\mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1})$, also

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\,\mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1})\,\mathrm{d}r$$

und wir erhalten

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1}) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\int_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2}\,\mathrm{d}r}$$

3. Das Linienintegral

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve. Statt über einem reellen Intervall zu integrieren, integrieren wir über C. Was machen wir also mit dem Ausdruck

$$\int_C f = ?$$

Nehmen wir zum Beispiel $f(x) \equiv 1$, das heisst $\int_C 1 =$ Länge der Kurve C. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine *glatte Kurve*. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Funktion, so dass sich γ nicht schneidet und nirgends anhält, also

- γ ist injektiv
- $\dot\gamma(t) \neq 0 \;\forall\, t \in [a,b]$
- $C = \gamma([a,b])$

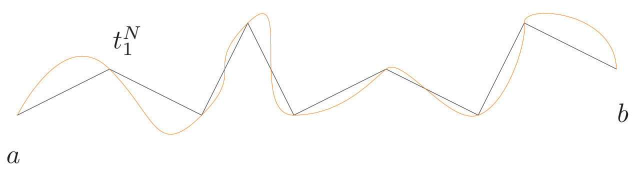
Was ist nun die Länge von C?

Satz 69: Die Länge der Kurve von C ist, unter diesen Voraussetzungen, gegeben durch die Formel

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t$$

Somit haben wir eine Formel für $\int_C 1$

Beweis: Wir unterteilen die Kurven in N gerade Segmente. $N \in \mathbb{N}$, Sei $t_0^N = a$, $t_1^N = a + \frac{b-a}{N}$,



$t_i^N = a + \frac{a-b}{N} i$, $t_N^N = b$.

$$\gamma_N(t) := \gamma(t_{i-1}^N) + (t - t_{i-1}^N)\frac{\gamma(t_i^N) - \gamma(t_{i-1}^N)}{t_i^N - t_{i-1}^N}$$

für $t_{i-1}^N \leq t \leq t_i^N$ sei $\ell(\gamma_N)$ die Länge von γ_N,

$$\ell(\gamma_N) = \sum_{i=1}^{N} \left|\gamma(t_i^N) - \gamma(t_{i-1}^N)\right|_{\mathbb{R}^n}$$

Wir wollen

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma) &= \lim_{N\to\infty} \ell(\gamma_N) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left|\gamma(t_i^N) - \gamma(t_{i-1}^N)\right| \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\gamma(t_i^N) - \gamma(t_{i-1}^N)}{t_i^N - t_{i-1}^N}\right| (t_i^N - t_{i-1}^N) \\
&\overset{\aleph}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left|\dot\gamma(t_i^N)\right| (t_i^N - t_{i-1}^N)
\end{aligned}$$

Was nach Definition aus Analysis I

$$= \int_a^b |\dot\gamma(t)| \,\mathrm{d}t$$

Zu $\aleph$:

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{\gamma(t_i^N) - \gamma(t_{i-1}^N)}{t_i^N - t_{i-1}^N}\right| - |\dot\gamma(t)|\right| &\leq \left|\frac{\gamma(t_i^N) - \gamma(t_{i-1}^N)}{t_i^N - t_{i-1}^N} - \dot\gamma(t_i^N)\right| \\
&= \frac{1}{t_i^N - t_{i-1}^N} \left|\int_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} \big(\dot\gamma(t) - \dot\gamma(t_i^N)\big) \,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{t_i^N - t_{i-1}^N} \int_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} \left|\dot\gamma(t) - \dot\gamma(t_i^N)\right| \,\mathrm{d}t \\
&\leq \max_{t\in t_i^N - t_{i-1}^N} \left|\dot\gamma(t) - \dot\gamma(t_i^N)\right| \\
&\leq \max_{\substack{S,\, t\,\in\,[a,\,b] \\ |s\,-\,t|\,\leq\,\frac{b-a}{N}}} |\dot\gamma(t) - \dot\gamma(s)|
\end{aligned}$$

Da γ stetig ist $\overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Definition: Seien C, γ wie in Satz 69. Wir definieren

$$\int_C f := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, |\dot\gamma(t)| \,\mathrm{d}t$$

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine m dimensionale glatte Fläche. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, so dass das Bild der Funktion die Fläche S ist. Ausserdem

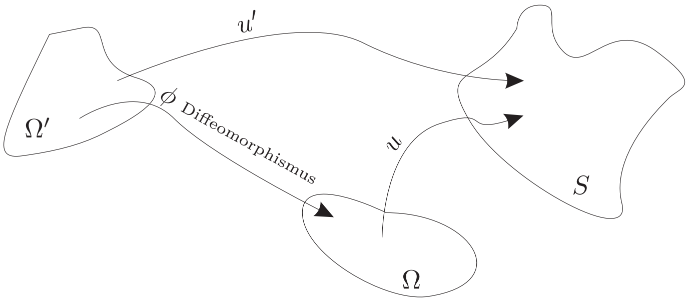
- U ist injektiv
- $\mathrm{d}u(x) \in \mathbb{R}^{n\times m}$
- $u(\Omega) = S$

Definition: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\int_C f = \int_\Omega f\big(u(x)\big) \cdot \sqrt{\det\big(\mathrm{d}u(x)^T \mathrm{d}u(x)\big)} \cdot \mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_m$$

$\Omega \ni x = (x_1, \ldots, x_m)$

[V46-170602] Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine m dimensionale $(m \leq n)$ *glatte Fläche*, das heisst $\exists\ \Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und $\exists\ u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, eine C^1 Abbildung, so dass



- $u(\Omega) = S$
- u ist injektiv
- $\mathrm{d}u(x) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ hat Rang m, das heisst $\mathrm{d}u(x)\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^m,\ \forall\, x \in \Omega$

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$\int_S f = \int_\Omega f\big(u(x)\big)\sqrt{\det\big(\mathrm{d}u(x)^T\mathrm{d}u(x)\big)}\,\mathrm{d}x_1\cdot\ldots\cdot\mathrm{d}x_m$$

diesen Ausdruck wollen wir noch näher betrachten

$$\underbrace{\mathrm{d}u(x)^T}_{\mathbb{R}^{m\times n}}\underbrace{\mathrm{d}u(x)}_{\mathbb{R}^{n\times m}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

Behauptung: $\det\big(\mathrm{d}u(x)^T\mathrm{d}u(x)\big) > 0$. Setzen wir $m = 1$, erhalten wir gerade das innere Produkt, das positiv definiert ist. Weshalb ist nun unsere Behauptung auch allgemein richtig? Bedingung, die Matrix ist positiv definiert. Was heisst positiv definiert?

$$\begin{aligned}\xi^T\underbrace{\mathrm{d}u(x)^T\mathrm{d}u(x)}_{\mathbb{R}^{m\times m}} &= \big(\mathrm{d}u(x)\xi\big)^T\mathrm{d}u(x)\xi \\ &= |\mathrm{d}u(x)\xi|^2 > 0 \qquad\qquad \forall\,\xi\neq 0\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\mathrm{d}u(x)^T\mathrm{d}u(x)$ eine positiv definierte Matrix ist, also ist $\det\big(\mathrm{d}u(x)^T\mathrm{d}u(x)\big) > 0$. Also macht der Ausdruck Sinn und wir können die Wurzel ziehen und das Integral hinschreiben.

Bemerkung: Frage: Hängt das Integral von der Wahl der Parametrisierung ab? Die Antwort muss Nein lauten, $\int_S f$ hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung ab.
Sei also $\phi : \Omega' \to \Omega$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$. Sei $u' : \Omega' \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$u' := u \circ \phi$$

Jeder Punkt in Ω liegt auch in Ω', da ϕ ein Diffeomorphismus ist und damit bijektiv. u' erfüllt also die gleichen drei Bedingungen wie u, insbesondere ist $u'(\Omega) = S$.

$$\int_{\Omega'} f\big(u'(x)\big)\sqrt{\det\big(\mathrm{d}u(x)^T\mathrm{d}u(x)\big)}\,\mathrm{d}x_1\cdot\ldots\cdot\mathrm{d}x_n := \Psi$$

(i) $\mathrm{d}u'(x) = \mathrm{d}u\big(\phi(x)\big)\mathrm{d}\phi(x)$ nach Kettenregel.

(ii) $\mathrm{d}u'(x)^T\mathrm{d}u'(x) = \mathrm{d}\phi(x)^T\cdot\mathrm{d}u\big(\phi(x)\big)^T\mathrm{d}u\big(\phi(x)\big)\cdot\mathrm{d}\phi(x)$ Die drei Summanden sind in $\mathbb{R}^{m\times m}$ und mit $\det\big(\mathrm{d}\phi(x)^T\big) = \det\big(\mathrm{d}\phi(x)\big)$ erhalten wir

$$\det\big(\mathrm{d}u'(x)^T\mathrm{d}u'(x)\big) = \det\Big(\mathrm{d}u(\phi(x))^T\mathrm{d}u\big(\phi(x)\big)\Big)\cdot\det\Big(\mathrm{d}\phi(x)\Big)^2$$

also ist

$$\begin{aligned}
\Psi &= \int_{\Omega'} f\big(u(\phi(x))\big)\sqrt{\det\big(\mathrm{d}u(\phi(x))^T\mathrm{d}u(\phi(x))\big)}\,|\det(\mathrm{d}\phi(x))|\,\mathrm{d}x_1\cdot\ldots\cdot\mathrm{d}x_m\\
&= \int_{\phi(\Omega)} f(u(x))\sqrt{\det(\mathrm{d}u(x)^T\mathrm{d}u(x)}\,\mathrm{d}x_1\cdot\ldots\cdot\mathrm{d}x_m\\
&= \int_S f
\end{aligned}$$

Beispiel 10.11: Sei $S = u(\Omega)$

$$\mathrm{Vol}_m(S) = \int_\Omega \sqrt{\det\big(\mathrm{d}u(x)^T\mathrm{d}u(x)\big)}\,\mathrm{d}x_1\cdot\ldots\cdot\mathrm{d}x_n$$

Beispiel 10.12: Sei $\Omega = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 | x_1^2+x_2^2<1\}$, sei $u:\Omega\to\mathbb{R}^3$

$$u(x_1,x_2) = \left(x_1, x_2, \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\right)$$

eine Parametrisierung der oberen Hemispähre.

$$\mathrm{d}u(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ -\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}\end{pmatrix}$$

Die Antwort, die man erhält, ist

$$\det\big(\mathrm{d}u(x_1,x_2)^T\mathrm{d}u(x_1,x_2)\big) = \frac{1}{1-x_1^2-x_2^2}$$

Daraus folgt

$$\mathrm{Vol}_2(\ ) = \int_{x_1^2+x_2^2<1}\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

In Polarkoordinaten

$$= \int_0^1 \frac{2\pi r\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}$$

$r^2 = s$ und damit $\mathrm{d}s = 2r\mathrm{d}r$

$$\begin{aligned}
&= \pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s}}\\
&= \pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s}} = \pi\left(2\sqrt{s}\right)\Big|_0^1\\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

4. Das Vektorfeld

Die Abbildung $K:\Omega\to\mathbb{R}^n$ ist zu verstehen als Schar von Vektoren, die an jedem Punkt in Ω angehängt sind. Das Vektorfeld kann mehrere Bedeutungen haben:

(i) Die Vektoren können als Geschwindigkeiten verstanden werden, welche die verschiedenen Punkte haben.
(ii) Die Vektoren können als verstanden werden, die auf die Punkte wirken.

Beispiel 10.13: Das Gravitationsfeld einer Punktmasse in grossem Abstands, die Dimension des Körpers soll also keine Rolle spielen, er soll als Punkt angenähert sein. Die Richtung der Vektoren zeigt zum 0 Punkt, der Betrag hängt vom Abstand ab, er soll proportional sein zu $\frac{1}{x^2}$

$$K(x) = -c\frac{x}{|x|^3}$$

Bei diesem Kraftfeld fällt uns auf, dass wenn wir die Funktion betrachten $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = -\frac{c}{|x|} = -c(x_1^2 + x_2^2 + x_3^3)^{-\frac{1}{2}}$$

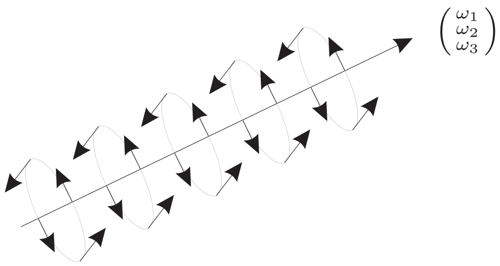
und diese ableiten, erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{c x_i}{|x|^3}$$

was genau -1 mal die i te Koordinate von $K(x)$ ist

$$= -K_i(x) \qquad\qquad i = 1, 2, 3$$

Also ist $K(x) = -\nabla f(x)$. K ist also ein *Gradienten Vektorfeld*, f heisst *Potential* von K.



Beispiel 10.14: Das Magnetfeld.

$$\begin{aligned} K(x) &= \omega \times x \\ &= \begin{pmatrix} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dieses Vektorfeld hat kein Potential, es ist also kein Gradient einer Funktion.

Wie kann man die Funktion aus dem Vektorfeld zurückgewinnen? Das hat etwas zu tun mit integrieren. Man nehme an, dass unser Vektorfeld konstant ist

Beispiel 10.15: $K(x) \equiv K$, hat also überall die selbe Länge und den selben Betrag. Betrachten wir mal ein Teilchen, welches sich in diesem Kraftfeld bewegt. Welche Arbeit muss man verrichten, um das Teilchen zu bewegen?

$$W = \langle K, x_1 - x_0 \rangle$$

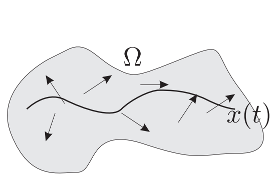
ist die Arbeit eines konstanten Vektorfeldes entlang einer geraden Linie von x_0 nach x_1.

Beispiel 10.16: Sei nun das Vektorfeld $K : \Omega \to \mathbb{R}^n$ allgemein und die Funktion, γ, nicht mehr linear, sondern sei $\gamma \in \mathbb{R}^n$ die Kurve, die durch die Abbildung

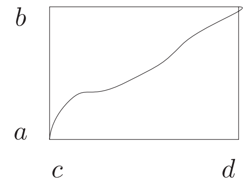
$$[0, 1] \to \Omega : t \mapsto x(x)$$

parametrisiert ist.

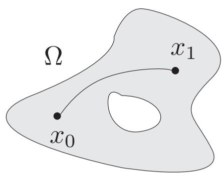
$$\gamma = \{x(t) | 0 \leq t \leq 1\}$$



(c) Arbeit im Vektorfeld



(d) Bemerkung 2



(e) Eine zusammenhängende Menge

Für die Arbeit des Vektorfeldes K entlang von γ teilen wir den Weg in lineare Teile. Also setzen also $N \in \mathbb{N}$, $t_0 = 0$, $t_i = \frac{i}{N}$, $t_N = 1$ und erhalten für die Arbeit

$$\begin{aligned} W_N &= \sum_{i=0}^{N-1} \big\langle K\big(x(t_i)\big), x(t_{i+1}) - x(t_i) \big\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left\langle K\big(x(t_i)\big), \underbrace{\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}}_{\approx \dot{x}(t_i)} \right\rangle (t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

Für $N \to \infty$ erhalten wir also

$$\lim_{N\to\infty} W_n = \int_0^1 \big\langle K\big(x(t)\big), \dot{x}(t) \big\rangle \,\mathrm{d}t$$

Die Arbeit von K entlang von γ ist also

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 \big\langle K\big(x(t)\big), \dot{x}(t) \big\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} K_i\big(x_i(t)\big)\dot{x}_i(t) \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Was wir auch schreiben können als

$$= \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} K_i(x) \,\mathrm{d}x_i$$

Was bedeuten soll, dass wir $\mathrm{d}x_i$ ersetzen durch $\dot{x}_i(t)$

Bemerkung: Sei $K(x) = \nabla f(x)$, daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_\gamma \sum_{i=1}^{N} K_i \,\mathrm{d}x_i &= \int_0^1 \langle K(x(t), \dot{x}(t) \rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \big\langle \nabla f\big(x(t)\big), \dot{x}(t) \big\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t)) \right) \mathrm{d}t \\ &= f\big(x(1)\big) - f\big(x(0)\big) \end{aligned}$$

Wir können die Funktion f also aus dem Vektorfeld rekonstruieren.
[V47-210602] *ausgefallen wegen Fussball* [V48-240602] Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ und $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Ausser-

dem sei $\gamma\{[a,b] \to \Omega : t \to x(t)\}$ ein Weg in Ω. Wie gross ist nun die Arbeit W von v entlang γ? *Siehe Fig 1(c)*

$$\begin{aligned} W &= \int_\gamma \langle v(x), \mathrm{d}x\rangle &&= \int_\gamma \sum_{i=1}^n v_i(x)\,\mathrm{d}x_i \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n v_i\big(x(t)\big)\dot{x}_i(t)\,\mathrm{d}t &&= \int_a^b \big\langle v\big(x(t)\big), \dot{x}(t)\big\rangle\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Bemerkung 1: Ein Ausdruck der Form

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle v(x), \mathrm{d}x\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n v_i(x)\,\mathrm{d}x_i \end{aligned}$$

nennt man eine *I-Form* auf Ω

Bemerkung 2: Das Integral $\int_\gamma a$ ist unabhängig von der Parametrisierung von γ.
Sei $[a,b] \to \Omega : t \to x(t)$. Sei weiter $\beta : [c,d] \to [a,b]$ eine Funktion, so dass $\dot{\beta}(s) > 0$. $\beta(c) = a^s$ und $\beta(d) = b^t$. Sei $y : [c,d] \to \Omega$ definiert durch

$$y(s) := x\big(\beta(s)\big)$$

y ist eine *Reparametrisierung* von γ.

$$\int_c^d \big\langle v\big(y(s)\big), \dot{y}(s)\big\rangle\ \mathrm{d}s = \int_c^d \big\langle v\big(x\big(\beta(s)\big)\big), \dot{x}\big(\beta(s)\big)\big\rangle \overbrace{\dot{\beta}(s)\,\mathrm{d}s}^{\mathrm{d}t}$$

$t = \beta(s)$ woraus folgt

$$\int_c^d \big\langle v\big(x\big(\beta(s)\big)\big), \dot{x}\big(\beta(s)\big)\big\rangle \overbrace{\dot{\beta}(s)\,\mathrm{d}s}^{\mathrm{d}t} = \int_{\beta(c)=d}^{\beta(d)=a} \big\langle v\big(x(t)\big), \dot{x}(t)\big\rangle\ \mathrm{d}t$$

Bemerkung 3: Seien $\gamma : [0,1] \to \Omega : t \mapsto x(t)$ und $-\gamma : [0,1] \to \Omega : t \mapsto x(1-t) := y(t)$.

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma} \alpha &= \int_0^1 \big\langle v\big(y(t)\big), \dot{y}(t)\big\rangle\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \big\langle v\big(x(1-t)\big), -\dot{x}(1-t)\big\rangle\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \big\langle v\big(x(s)\big), \dot{x}(s)\big\rangle\ \mathrm{d}s \\ &= -\int_0^1 \big\langle v\big(x(s)\big), \dot{x}(s)\big\rangle\ \mathrm{d}s \\ &= -\int_\gamma \alpha \end{aligned}$$

Bemerkung 4: Falls $v(x) = \nabla f(x)\ \forall\, x \in \Omega$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion sind, so gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma \langle v, \mathrm{d}x\rangle &= \int_a^b \big\langle \nabla f\big(x(t)\big), \dot{x}(t)\big\rangle\ \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(x(t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= f\big(x(b)\big) - f\big(x(a)\big) \end{aligned}$$

Satz 70 (von Stokes): Wir definieren $\mathrm{d}f$ wie folgt

$$\begin{aligned}\alpha &= \langle v, \mathrm{d}x\rangle &&= \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\,\mathrm{d}x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i &&=: \mathrm{d}f\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\int_\gamma \mathrm{d}f = \int_{\partial\gamma} f$$

wobei

$$\partial\gamma = \{x^-(a), x^+(b)\}$$

also folgt

$$\int_{\partial\gamma} f = -f\big(x(a)\big) + f\big(x(b)\big)$$

Beispiel 10.17: Sei $n = 3$ und $v(x) = (x_2^2, x_1x_3, 1)$. Seien weiter $x(t) = (t,t,t)$ und $y(t) = (t, t^2, t^3)$ wobei $0 \le t \le 1$. Offensichtlich gilt $x(0) = (0,0,0) = y(0)$ und $x(1) = (1,1,1) = y(1)$. Für den Weg $x(t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big\langle v\big(x(t)\big), \dot{x}(t)\big\rangle &= \int_0^1 \big(x_2(t)^2\dot{x}_1(t) + x_1(t)x_3(t)\dot{x}_2 + \dot{x}_3(t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (2t^2+1)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Analog für den Weg $y(t)$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big\langle v\big(y(t)\big), \dot{y}(t)\big\rangle &= \int_0^1 (t^4 + 2t^5 + 3t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{23}{15}\end{aligned}$$

Da $v \neq \nabla f(x)$ sind offensichtlich die Integrale über dem Vektorfeld verschieden für unterschiedliche Wege.

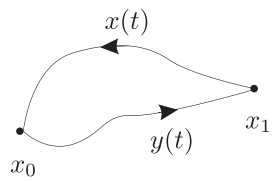
Definition: Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst *konservativ*, wenn für jeden geschlossenen Weg $[a,b] \to \Omega : t \mapsto x(t)$, $x(a) = x(b)$ gilt

$$\int_a^b \big\langle v\big(x(t)\big), \dot{x}(t)\big\rangle\,\mathrm{d}t = 0$$

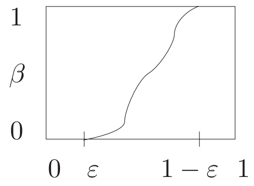
Satz 71: Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und $v : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) v ist konservativ
(ii) v ist ein Gradientenvektorfeld, das heisst $\exists$ eine C^1 Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass $v(x) = \nabla f\ \forall\, x \in \Omega$

Beweis: „(ii) $\Rightarrow$ (i)“ siehe Bemerkung 4.
„(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Annahme: Ω ist zusammenhängend, das heisst, je zwei Punkte in Ω lassen sich durch einen (stetigen) Weg in Ω verbinden. Konstruktion von f: Wenn zu f ein konstanter Betrag addiert wird, ändert sich der Gradient nicht, wir können also einen Punkt $x_0 \in \Omega$ vorgeben, so dass an dieser Stelle $f = 0$. Sei $x_1 \in \Omega$, dann gibt es einen C^1 Weg $[0,1] \to \Omega$, $t \mapsto x(t)$ so dass $x(0) = x_0$



(f) Zur Behauptung 1



(g) Verlauf von $z(t)$

und $x(1) = x_1$. Wir definieren

$$f(x_1) = \int_0^1 \big\langle v\big(x(t)\big), \dot{x}(t)\big\rangle \, \mathrm{d}t$$

Behauptung 1: Dieses Integral ist unabhängig von der Wahl des Weges $t \mapsto x(t)$.
Behauptung 2: $f \in \mathbb{C}^1$, $\nabla f = v$.
Zur Behauptung 1: Sei $[0,1] \to \Omega : t \mapsto y(t)$ ein weiterer C^1 Weg, so dass $y(0) = x_0$, $y(1) = x_1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen

$$\begin{cases} x(t) = y(t) = x_0, & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ x(t) = y(t) = x_1, & 1-\varepsilon \leq t \leq 1 \end{cases}$$

was wir durch Reparametrisierung erreichen. Betrachte den Weg $z : [0,1] \to \Omega$

$$z(t) = \begin{cases} x(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ y(2-2t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Also ist z ein geschlossener C^1 Weg. $z(0) - z(1) = x_0$, da v konstant folgt

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \langle v(z(t)), \dot{z}(t)\rangle = 0 \\ &\qquad = \int_0^1 \langle v(x(t), \dot{x}(t)\rangle \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \langle v(y(t)), \dot{y}(t)\rangle \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Also ist $\int$ wegunabhängig.
Zur Behauptung 2: Zu zeigen

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(x+s\xi) - f(x)}{s} = \langle v(x), \xi\rangle \quad \star \qquad\qquad \forall\, x \in \Omega \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = v(x)$. Wir wählen einen Weg $x : [0, 1-\xi] \to \Omega$, so dass $x(0) = x_0$ und $x(1) = x$, $x(1+s) = x + s\xi$, $-\varepsilon \leq s \leq \varepsilon$, daraus folgt

$$f\big(x(t)\big) = \int_0^t \langle v(x(s)), \dot{x}(s)\rangle \, \mathrm{d}s$$

also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t)) = \langle v(x(t)), \dot{x}(t)\rangle \qquad\qquad \forall\, t$$

also

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(x(1+s)) - f(x(1))}{s} = \langle v(x), \xi\rangle$$

das heisst $\star$ gilt.

Bemerkung 5: Falls $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein C^1 Gradientenvektorfeld ist, so gilt

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

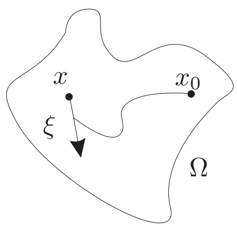
Beweis: $v_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, also gilt

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

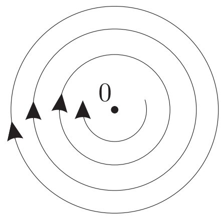
Beispiel 10.18: Sei $n = 3$, $v_1 = x_2^2$, $v_2 = x_1 x_3$ $v_3 = 1$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 2x_2 \neq \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = x_3$$

also liegt kein Gradientenvektorfeld vor.



(h) Zur Behauptung 2



(i) Beispiel 10.19

Beispiel 10.19: Sei $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{0, 0\}$

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \\ &:= \big(P(x,y), Q(x,y) \big) \end{aligned}$$

Ist $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$? Ja es gilt

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Also ist die Bemerkung 5 erfüllt. Es ist $z(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \big(r\cos(t), r\sin(t)\big)$. Es gilt

$$\big\langle v\big(z(t)\big), \dot z(t) \big\rangle > 0$$

woraus folgt

$$\int_0^{2\pi} \big\langle v\big(z(t)\big), \dot z(t) \big\rangle \, \mathrm{d}t > 0$$

Es liegt also kein konservatives Feld vor, da das Vektorfeld im 0 Punkt unbestimmt ist.

Definition: [V49-290602] Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heisst *einfach zusammenhängend*, wenn sich jeder geschlossene Weg zusammenziehen lässt, das heissst, für jede C^1 Abbildung $x : [0,1] \to \Omega$ so dass $x(0) = x(1)$ gibt es eine C^1 Abbildung $u : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$, so dass

$$\begin{aligned} u[1,t] &= x(t) && \forall\, t \\ u[s,0] &= x(0) && \forall\, s \\ u[s,1] &= x(1) = x(0) && \forall\, s \\ u[0,1] &= x(0) && \forall\, t \end{aligned}$$

$v : \Omega \to \mathbb{R}^n$, C^1 Vektorfeld, $v = \nabla f$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine C^2 Funktion. Dann gilt

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Satz 72: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene einfach zusammenhängende Teilmenge. Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, dann sind folgende Aussagen äquivalent

(1) v ist ein Gradientenfeld
(2) v ist konservativ, das heisst

$$\int_0^1 \big\langle v\big(x(t)\big), \dot{x}(t)\big\rangle \,\mathrm{d}t = 0$$

für alle geschlossenen Wege $x : [0,1] \to \Omega$
(3) $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \ \forall\, x \in \Omega$ und $\forall\, i,j = 1,\dots,n$

Bemerkung: Nach Satz gilt, 1) $\Leftrightarrow$ 2)

Bemerkung: 1) $\Rightarrow$ 3)

$$v_i = \frac{\partial f}{\partial x_j} \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

also

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Satz 73 (von Stokes):

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_S \mathrm{d}\alpha$$

wobei

$$\alpha := \sum_{i=1}^n v_i(x)\,\mathrm{d}x_i$$

und

$$\partial\alpha := \sum_{i<j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$$

Definition: Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ und $u : B \to \mathbb{R}^n$ eine C^1 Abbildung und $S := u(B)$. Sei $\tau = \{\tau_{ij}(x)\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ wobei $\tau_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\int_S \tau := \sum_{i<j} \int_B \tau_{ij}\big(u(s,t)\big) \left(\frac{\partial u_i}{\partial s}\frac{\partial u_j}{\partial t} - \frac{\partial u_j}{\partial s}\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$B = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 | s^2 + t^2 \le 1\}$, $u = (u_1,\dots,u_n)) : B \to \mathbb{R}^n$ eine C^1 Funktion. $x(0) := U\big(\cos\theta, \sin\theta\big)$, $s = u(B)$, $\partial S = u(\partial B) = x([0,2\pi])$, $\alpha = \sum u_i(x)\,\mathrm{d}x_i$. In diesem Beispiel hat der Stelle von Stokes folgende Form

$$\int_0^{2\pi} \big\langle u\big(x(0)\big), \dot{x}(0)\big\rangle \,\mathrm{d}\theta = \sum_{i<j} \int_{s^2+c^2 \le 1} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\big(u(s,t)\big) - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\big(u(s,t)\big) \right)$$
$$\cdot \left(\frac{\partial u_j}{\partial s}(s,t)\frac{\partial u_j}{\partial s}(s,t)\frac{\partial u_j}{\partial t}(s,t) - \frac{\partial u_i}{\partial t}(s,t) - \frac{\partial u_j}{\partial s}(s,t) \right) \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\partial S} a = \int_S \mathrm{d}x$$

Beispiel 10.20: $n = 2$, $B \subset \mathbb{R}^2$ eine abgeschlossene Menge, ∂B eine glatte Kurve. $B \to \mathbb{R}^2$, $(s,t) \mapsto \big(P(s,t), Q(s,t)\big)$ eine C^1 Funktion.

Satz 74 (Greensche Formel): Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\int_{\partial B} \big(B \mathrm{d}s + Q \mathrm{d}t\big) = \int_B \big(\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial t}\big) \, \mathrm{d}s \mathrm{d}t$$

Beweis: Beispiel 10.21: $t = \phi(s) > c \; \forall \; s \in [a, b]$

$$B = \left\{ (s,t) \,\middle|\, \begin{matrix} a \leq s \leq b \\ c \leq t \leq \phi(s) \end{matrix} \right\}$$

Behauptung:

$$-\int_B \frac{\partial P}{\partial t} \, \mathrm{d}s \mathrm{d}t = \int_{\partial B} P \, \mathrm{d}s$$

$$\begin{array}{llll} \partial B: & \gamma_1 & [a,b] \to \mathbb{R}^2 & s \mapsto (s,c) \\ & \gamma_2 & [c,\phi(b)] \to \mathbb{R}^2 & t \mapsto (b,t) \\ & \gamma_3 & [a,b] \to \mathbb{R}^2 & s \mapsto (s,\phi(s)) \\ & \gamma_4 & [c,\phi(a)] \to \mathbb{R}^2 & t \mapsto (a,t) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} P \, \mathrm{d}s &= \int_{\gamma_1} P \, \mathrm{d}s - \int_{\gamma_3} P \, \mathrm{d}s \\ &= \int_a^b P(s,c) \, \mathrm{d}s - \int_a^b P\big(s, \phi(s)\big) \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

also

$$-\int_B \frac{\partial P}{\partial t}(s,t) \, \mathrm{d}s \mathrm{d}t = -\int_a^b \left(\int_C^{\phi(s)} \frac{\partial P}{\partial t}(s,t) \, \mathrm{d}t \right) \, \mathrm{d}s$$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra

$$\begin{aligned} &= -\int_a^b \big(P\big(s, \phi(s)\big) - P(s,c) \big) \, \mathrm{d}s \\ &= \int_a^b \big(P(s,c) - P(s, \phi(c)) \big) \, \mathrm{d}s \\ &= \int_{\partial B} P \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$-\int_B \frac{\partial P}{\partial t} = \int_{\partial B} P \, \mathrm{d}s$$

$\forall$ Gebiete B

$$\int_B \frac{\partial Q}{\partial s} = \int_{\partial B} Q \, \mathrm{d}t$$

genauso beweisen oder s und t vertauschen.

Beweis (Satz von Stokes, Formel $\star$): Sei $S \subset \mathbb{R}^n$, $u : B \to \mathbb{R}^n$, $u(B) = S$, $B \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x) \, \mathrm{d}x_i$

$$\int_{\partial s} \alpha = \int_{\partial B} P \, \mathrm{d}s + Q \, \mathrm{d}t$$

wobei

$$P(s,t) = \sum_{i=1}^{n} v_i\big(u(s,t)\big) \cdot \frac{\partial u}{\partial s}(s,t)$$
$$Q(s,t) = \sum_{j=1}^{n} v_j\big(u(s,t)\big) \cdot \frac{\partial v_j}{\partial t}(s,t)$$

also ist nach der Formel von Green

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

Übung

$$\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(u) - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(u) \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial s}\frac{\partial u_j}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_j}{\partial s} \right)$$

[V50-010702] Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Fläche, die von der glatten Kurve $\partial S \subset \mathbb{R}^n$ begrenzt wird. Sei

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} K_i(x)\,\mathrm{d}x_i$$

und

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{i<1} \left(\frac{\partial K_i}{\partial x_i} - \frac{\partial K_i}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$$

Der Satz von Stokes besagt nun

$$\int_S \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial S} \alpha$$

Sei $n = 3$, damit wird

$$\alpha = K_1(x)\mathrm{d}x_1 + K_2(x)\mathrm{d}x_2 + K_3(x)\mathrm{d}x_3$$

und

$$\mathrm{d}\alpha = \left(\frac{\partial K_3}{\partial x_2} - \frac{\partial K_2}{\partial x_3} \right) \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \left(\frac{\partial K_1}{\partial x_3} - \frac{\partial K_3}{\partial x_1} \right) \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial K_2}{\partial x_1} - \frac{\partial K_1}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$$

Dabei lassen sich die Terme in den Klammern vertauschen, wenn man auch die Differentiale vertauscht:

$$\left(\frac{\partial K_i}{\partial x_j} - \frac{\partial K_j}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i = \left(\frac{\partial K_j}{\partial x_i} - \frac{\partial K_i}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$$

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $K : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Die *Rotation* von K ist das Vektorfeld.

$$\mathrm{rot}(K) := \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial x_2} - \frac{\partial K_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial K_1}{\partial x_3} - \frac{\partial K_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x_1} - \frac{\partial K_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Notation: Wir definieren

$$\mathrm{d}\vec{\omega} := \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \end{pmatrix}$$

und erhalten also in unserem Eingangsbeispiel

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha &= \langle \mathrm{rot}(K), \mathrm{d}\vec{\omega} \rangle \\ &= \mathrm{rot}(K) \cdot \mathrm{d}\vec{\omega} \end{aligned}$$

Satz 75 (von Stokes in Dim. 3): Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche und ∂S die dazu gehörende glatte Kurve. Sei weiter $K : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld und $S \subset \Omega$ eine offene Teilmenge. Dann gilt

$$\int_S \mathrm{rot}(K) \cdot \mathrm{d}\vec{\omega} = \int_{\partial S} K \cdot \mathrm{d}x$$

Satz 76 (Satz 72 in Dim. 3): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene, einfach zusammenhängende Teilmenge und $K : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Dann gilt

$$\mathrm{rot}(K) = 0 \Leftrightarrow K \text{ ist ein Gradienten Vektorfeld}$$

und

$$K = \nabla f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 \\ \partial f/\partial x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rot}(K) = 0$$

Zusammengefasst also

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}(f)\right) = 0$$

Sei C^1 eine Abbildung $u : B \to \mathbb{R}^3$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes Gebiet ist. Sei ∂B die dazugehörige glatte Kurve in $\mathbb{R}^2$. Sei $S = u(B) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$, dabei ist Ω offen. Ein Punkt (s,t) wird wie folgt nach S überführt:

$$(s,t) \mapsto \begin{pmatrix} u_1(s,t) \\ u_2(s,t) \\ u_3(s,t) \end{pmatrix}$$

Sei weiter $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_S v \cdot \mathrm{d}\vec{\omega} &= \int_S \big(v_1(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + v_2(x)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + v_3(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \big) \\ &= \int_B \Big\{ v_1\big(u(s,t)\big) \left(\frac{\partial u_2}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\frac{\partial u_3}{\partial s} \right) \\ &\qquad + v_2\big(u(s,t)\big) \left(\frac{\partial u_3}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_3}{\partial t}\frac{\partial u_1}{\partial s} \right) \\ &\qquad + v_3\big(u(s,t)\big) \left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\frac{\partial u_1}{\partial s} \right) \Big\} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Dies entspricht gerade dem Kreuzprodukt und wir erhalten

$$= \int_B \left\langle v(u), \frac{\partial u}{\partial s} \times \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

5. Oberflächenintegral

Wir wollen ein Integral der Form

$$\int_S f$$

hinschreiben, wobei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Die Definition war, mit Hilfe der Parametrisierung

$$\int_S f = \int_B f\big(u(s,t)\big) \sqrt{\det\left(\mathrm{d}u(s,t)^T \mathrm{d}u(s,t)\right)} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

Wir werden den Ausdruck in der Wurzel etwas genauer betrachten.

$$\mathrm{d}u(s,t) = \begin{pmatrix} \partial u_1/\partial s & \partial u_1/\partial t \\ \partial u_2/\partial s & \partial u_2/\partial t \\ \partial u_3/\partial s & \partial u_3/\partial t \end{pmatrix}$$

Wenn wir disen Ausdruck transponieren und dabei noch $\partial_s u_i = \frac{\partial u_i}{\partial s}$ setzen erhalten wir

$$\mathrm{d}u(s,t)^T = \begin{pmatrix} \partial_s u_1 & \partial_s u_2 & \partial_s u_3 \\ \partial_t u_1 & \partial_t u_2 & \partial_t u_3 \end{pmatrix}$$

Multipliziert

$$\mathrm{d}u(s,t)^T \mathrm{d}u(s,t) = \begin{pmatrix} |\partial_s u|^2 & \langle \partial_s u, \partial_t u\rangle \\ \langle \partial_s u, \partial_t u\rangle & |\partial_t u|^2 \end{pmatrix}$$

Determiniert

$$\begin{aligned} \det\big(\mathrm{d}u(s,t)^T \mathrm{d}u(s,t)\big) &= |\partial_s u|^2 \, |\partial_t u|^2 - \langle \partial_s u, \partial_t u\rangle^2 \\ &= |\partial_s u \times \partial_t u|^2 \end{aligned}$$

Setzen wir das Ergebnis ein

$$\int_S f = \int_B f\big(u(s,t)\big) \, |\partial_s u \times \partial_t u| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t$$

Zusammenfassung: $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $B \subset \mathbb{R}^2$, $u : B \to \mathbb{R}^3$, $S = u(B) \subset \Omega$, $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$

$$\int_S v \, \mathrm{d}\vec{\omega} = \int_B \langle u(x), \partial_s u \times \partial_t u\rangle \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t$$

ist das Integral einer 2 Form. $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\int_S f = \int_S f \mathrm{d}\omega = \int_B f(u) \, |\partial_s u \times \partial_t u| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t$$

ist das Oberflächenintergral. Wir wollen nun die beiden Integrale ineinander überführen und betrachten dazu die geometrische Bedeutung von $\partial_s u \times \partial_t u$. Wir setzen voraus

- $u : B \to \mathbb{R}^3$ eine injektive Funktion
- $\operatorname{rang}\big(\mathrm{d}u(s,t)\big) = 2$, $\forall\ (s,t) \in B$, das heisst $\partial_s u(s,t)$ und $\partial_t u(s,t)$ sind linear unabhängig $\forall\ (s,t) \in B$

$\frac{\partial u}{\partial s} \in T_{u(s,t)}S$, wobei T der Tangentialraum darstellt. Ebenso gilt $\frac{\partial u}{\partial t} \in T_{u(s,t)}S$. Was ist nun die Dimension von $T_u S$?

$$\begin{aligned} T_{u(s,t)}S &= \left\{ \lambda \frac{\partial u}{\partial s} + \mu \frac{\partial u}{\partial t} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Spur}\left\{ \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} \right\} \end{aligned}$$

daraus folgt

$$= (\partial_s u \times \partial_t u)^\perp$$

Sei $x := u(s,t) \in S$. Dann ist der Vektor

$$\eta(x) := \frac{\partial_s u \times \partial_t u}{|\partial_s u \times \partial_t u|}$$

ein Einheits normaler Vektor von S an der Stelle x. (Da $\partial_s u$ und $\partial_t u$ linear unabhängig sind, wird das Kreuzprodukt nie null.) $T_x S = \eta(x)^\perp$, das heisst

$$\partial_s u \times \partial_t u = |\partial_s u \times \partial_t u| \cdot \eta\big(u(s,t)\big)$$

also ist

$$\langle v(u), \partial_s u \times \partial_t u\rangle = \langle v(u), \eta(u)\rangle \, |\partial_s u \times \partial_t u|$$

Durch integrieren der rechten und linken Seite erhalten wir

$$\int_B \langle v(u), \partial_s u \times \partial_t u\rangle = \int_S v \, \mathrm{d}\vec{\omega}$$
$$\int_B \langle v(u), \eta(u)\rangle \, |\partial_s u \times \partial_t| = \int_S \langle v, \eta\rangle$$

was uns zu folgender Bemerkung führt:

Bemerkung: Die gewünschte Beziehung lautet

$$\int_S v \cdot \mathrm{d}\vec{\omega} = \int_S \langle v, \eta\rangle$$

wobei $\eta(x) \in \mathbb{R}^3$ der Einheitsnormalen Vektor für $T_x S$ darstellt. An dieser Stelle stutzen wir, denn es existieren *zwei* Einheitsnormalenvektoren. Die Wahl ist jedoch durch die Parametrisierung gegeben. Eine Parametrisierung $\eta(x) \in T_x S^\perp$ definiert eine Orientierung des Tangentialraumes $T_x S$.
Eine Parametrisierung u von S heisst heisst *verträglich* mit dem Normalenvektorfeld $v : S \to \mathbb{R}^3$, falls

$$\det\left(\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial u}{\partial t}(s,t), \eta\big(u(s,t)\big)\right) > 0 \qquad \forall\, s, t$$

Wobei

$$\eta\big(u(s,t)\big) = \frac{\partial_s u \times \partial_t u}{|\partial_s u \times \partial_t u|}$$

falls η ein Einheitsnormalen Vektorfeld ist. Geometrisch ist dieser Ausdruck der Fluss des Vektorfeldes durch einer Fläche.

Definition: Das Integral

$$\int_S v \, \mathrm{d}\vec{\omega} = \int_S \langle v, \eta\rangle$$

heisst *Fluss* des Vektorfeldes v durch S in Richtung des Normalenvektorfeldes η.

Definition: Sei $\Omega \in \mathbb{R}^3$ offen und $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, dann heisst

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Divergenz von v

Satz 77 (Divergenzsatz): Sei $\Omega \in \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge und $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Sei $A \subset \Omega$ eine abgeschlossene Menge und ∂A eine glatte Fläche. Dann gilt

$$\int_{\partial A} v \, \mathrm{d}\vec{\omega} = \int_A \operatorname{div}(v) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3$$

∂A ist nach aussen orientiert.

Beispiel 10.22: Sei $A := \{x \in \mathbb{R}^3 |\, |x| \leq 1\}$, der Rand von A ist also $\partial A = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 |\, |x| = 1\}$. $v(x) = x$, also ist $\operatorname{div}(v) = 3$ und somit

$$\int_A \operatorname{div}(v) = 3 \operatorname{Vol}(A)$$

Nach dem Divergenzsatz ist dies

$$= \int_{\partial A} v \, \mathrm{d}\vec{\omega}$$
$$= \int_{S^2} \langle v, \eta \rangle$$

$v(x) = x$ und $\eta(x) = x$ also

$$= \mathrm{Vol}_2(S^2)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} 3\,\mathrm{Vol}_3\left(\{|x| \le 1\}\right) &= \mathrm{Vol}_2\left(\{|x| = 1\}\right) \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\mathrm{Vol}\left(\{|x| \le 1\}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

6. Zusammenfassung

1 Wir bezeichnen mit
- $Q(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n | a_j < x_j < b_j\}$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ ein offener Quader.
- $\overline{Q} := \overline{Q}(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n | a_j \le x_j \le b_j\}$ den Abschluss von Q.
- $\partial Q := \overline{Q} \backslash Q$ den Rand von Q.

2 Ist $Q = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ ein offener Quader, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_Q 1 \, \mathrm{d}x &= \mathrm{Vol}_n(Q) \\ &= \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \end{aligned}$$

3 Das Oberflächenvolumen von ∂Q ist definiert durch

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial Q) = 2 \sum_{j=1}^{n} \prod_{i \ne j} (b_i - a_i)$$

4 Der Durchmesser einer beliebigen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ schreiben wir als

$$\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} |x - y|$$

5 Eine Partition B ist eine endliche Folge $P = (P_1, \dots, P_k$ von offene Quadern, so dass
(i) $B = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{P_i}$
(ii) $P_i \cap P_j = \emptyset \forall\ i \ne j$
Die Menge aller Partitionen von B bezeichnen wir mit $\wp(B)$

6 Für $P \in \wp(B)$ definieren wir die Untersumme und die Obersumme durch

$$\underline{S}(t, P) = \sum_{i=1}^{k} \inf_{\overline{P_i}} f \cdot \mathrm{Vol}_n(P_i) \qquad \overline{S}(t, P) = \sum_{i=1}^{k} \sup_{\overline{P_i}} f \cdot \mathrm{Vol}_n(P_i)$$

7 Sei $B = [-\mathbb{R}, \mathbb{R}]$. Eine beschränkte Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ heisst Riemann integrierbar, wenn

$$\sup_{P \in \wp(B)} \underline{S}(f, P) = \inf_{Q \in \wp(B)} \overline{S}(f, Q)$$

In diesem Fall ist das Integral von f definiert durch

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x_i \cdots \mathrm{d}x_n := \sup_{P\in\wp(B)} \underline{S}(f,P)$$

8 Für das Korn $\delta(P)$ einer Partition $P = (P_1, \dots, P_n) \in \wp(B)$ gilt:

$$\delta(P) := \max_{1\le i\le k} \operatorname{diam}(P_j)$$

9 Grundregeln des Integrals: Sei $B = [-R, R]^n$ beschränkt und $f, g : B \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar. Ausserdem ist $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(1) $f + g$ ist Riemann integrierbar und

$$\int_B \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x + \int_B g(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) λf ist Riemann integrierbar und

$$\int_B \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_B f(x)\,\mathrm{d}x$$

(3) Wenn $f(x) \le g(x)\ \forall\, x \in B$ dann gilt

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_B g(x)\,\mathrm{d}x$$

10 Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst Nullmenge, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Quader Q_1, Q_2, Q_3, … gibt, so dass $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_i) \le \varepsilon$

11 Das innere von A ist die Teilmenge von A

$$\operatorname{int}(A) = \mathring{A} = \{x \in A | \exists\, \varepsilon > 0 \text{ so dass } B_\varepsilon(x) \subset A\}$$

12 Sei A eine Nullmenge, dann gilt $\operatorname{int}(A) = \emptyset$

13 Sei $B = [-R, R]^n$ und $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) f ist Riemann integrierbar

(ii) Die Menge $A(f)$ aller Punkte $x \in B$, an denen f unstetig ist, ist eine Nullmenge

14 Der Rand von A ist die Menge

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall\, \varepsilon > 0 \text{ gilt } B_\varepsilon(x) \cap A \ne \emptyset, B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \backslash A) \ne \emptyset\}$$

15 Falls $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge ist, so dass ∂A eine Nullmenge ist, dann gilt χ_A ist Riemann integrierbar.

16 Für das Volumen, oder auch das Mass gilt

$$\mathrm{Vol}(A) = \mu(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\,\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n$$

17 $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

18 $f : B = [-R, R]n \to \mathbb{R}$ beschränkt. Falls f Riemann integrierbar ist dann ist $|f|$ auch Riemann integrierbar und

$$\left| \int_B f(x)\,\mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_n \right| \le \int_B |f(x)|\;\mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_n$$

19 Der Satz von Fubini lautet: Sei $f : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int_a^b \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

20 Seien $\Omega, \Omega' \in \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : \Omega \to \Omega'$ ein Diffeomorphismus, $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ lokal Riemann integrierbar, $A \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge, ∂A eine (Rand) Nullmenge. Dann gilt: $f \circ \phi$ ist lokal Riemann integrierbar und $\partial\phi(A) = \phi(\partial A)$ ist eine Nullmenge.

$$\int_{\phi(A)} f(y_1, \ldots, y_n)\,\mathrm{d}y_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}y_n = \int_A f\big(\phi(x_1, \ldots, x_n)\big) \cdot |\det \mathrm{d}\phi(x_1, \ldots, x_n)|\,\mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_n$$

21 Zwischen kartesischen- und Polarkoordinaten bestehen die Beziehungen $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $(x, y) = \phi(r, \theta)$.

22 Nach der Substitutionregel gilt: $\phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \supset A \to \mathbb{R}^2$

$$\int_{\phi(A)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_A f \circ \phi(r, \theta) r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

23 Die Länge der Kurve von C ist, gegeben durch die Formel

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t$$

24 Seien C, γ gegeben, dann gilt

$$\int_C f := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,|\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t$$

25 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_C f = \int_\Omega f\big(u(x)\big) \cdot \sqrt{\det\big(\mathrm{d}u(x)^T \mathrm{d}u(x)\big)} \cdot \mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_m$$

$\Omega \ni x = (x_1, \ldots, x_m)$

26 Die Vektoren eines Vektorfeldeskönnen als Geschwindigkeiten, welche die verschiedenen Punkte haben oder aber als Kräfte verstanden werden, die auf die Punkte wirken.

27 Wenn $K(x) = -\nabla f(x)$, dann nennt man K Gradienten Vektorfeld, f heisst Potential von K.

28 Die Arbeit von K entlang von γ ist

$$W = \int_0^1 \big\langle K\big(x(t)\big), \dot x(t)\big\rangle\,\mathrm{d}t$$

29 Die Funktion f lässt sich aus dem Vektorfeld konstruieren durch die Beziehung

$$\int_0^1 \langle K(x(t), \dot x(t)\rangle\,\mathrm{d}t = f\big(x(1)\big) - f\big(x(0)\big)$$

30 Ein Ausdruck der Form

$$\begin{aligned}\alpha &= \langle v(x), \mathrm{d}x\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n v_i(x)\,\mathrm{d}x_i\end{aligned}$$

nennt man eine I-Form auf Ω

31

$$\int_{-\gamma} \alpha = -\int_\gamma \alpha$$

32 Der Satz von Stokes lautet: Wir definieren $\mathrm{d}f$ wie folgt

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle v, \mathrm{d}x\rangle &&= \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\,\mathrm{d}x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i &&=: \mathrm{d}f \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\int_\gamma \mathrm{d}f = \int_{\partial\gamma} f$$

wobei

$$\partial\gamma = \{x^-(a), x^+(b)\}$$

also folgt

$$\int_{\partial\gamma} f = -f\big(x(a)\big) + f\big(x(b)\big)$$

33 Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst konservativ, wenn für jeden geschlossenen Weg $[a,b] \to \Omega : t \mapsto x(t)$, $x(a) = x(b)$ gilt

$$\int_a^b \big\langle v\big(x(t)\big), \dot{x}(t)\big\rangle\ \mathrm{d}t = 0$$

34 Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und $v : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) v ist konservativ
(ii) v ist ein Gradientenvektorfeld, das heisst $\exists$ eine C^1 Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass $v(x) = \nabla f$ $\forall\, x \in \Omega$

35 Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heisst einfach zusammenhängend, wenn sich jeder geschlossene Weg zusammenziehen lässt.

36 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene einfach zusammenhängende Teilmenge. Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, dann sind folgende Aussagen äquivalent
(1) v ist ein Gradientenfeld
(2) v ist konservativ
(3) $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ $\forall\, x \in \Omega$ und $\forall\, i, j = 1, \dots, n$

37 Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ und $u : B \to \mathbb{R}^n$ eine C^1 Abbildung und $S := u(B)$. Sei $\tau = \{\tau_{ij}(x)\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ wobei $\tau_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\int_S \tau := \sum_{i<j} \int_B \tau_{ij}\big(u(s,t)\big) \left(\frac{\partial u_i}{\partial s}\frac{\partial u_j}{\partial t} - \frac{\partial u_j}{\partial s}\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

38 Die Greensche Formel lautet

$$\int_{\partial B} \big(B\mathrm{d}s + Q\mathrm{d}t\big) = \int_B \big(\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial t}\big)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

39 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $K : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Die Rotation von K ist das Vektorfeld.

$$\mathrm{rot}(K) := \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial x_2} - \frac{\partial K_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial K_1}{\partial x_3} - \frac{\partial K_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x_1} - \frac{\partial K_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

40 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche und ∂S die dazu gehörende glatte Kurve. Sei weiter $K : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld und $S \subset \Omega$ eine offene Teilmenge. Dann gilt

$$\int_S \operatorname{rot}(K) \cdot \mathrm{d}\vec{\omega} = \int_{\partial S} K \cdot \mathrm{d}x$$

41

$$\operatorname{rot}\big(\operatorname{grad}(f)\big) = 0$$

42

$$\int_S v \cdot \mathrm{d}\vec{\omega} = \int_B \left\langle v(u), \frac{\partial u}{\partial s} \times \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t$$

43 Das Integral

$$\int_S v\, \mathrm{d}\vec{\omega} = \int_S \langle v, \eta \rangle$$

heisst Fluss des Vektorfeldes v durch S in Richtung des Normalenvektorfeldes η.

44 Sei $\Omega \in \mathbb{R}^3$ offen und $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, dann heisst

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Divergenz von v

45 Sei $\Omega \in \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge und $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Sei $A \subset \Omega$ eine abgeschlossene Menge und ∂A eine glatte Fläche. Dann gilt

$$\int_{\partial A} v\, \mathrm{d}\vec{\omega} = \int_A \operatorname{div}(v)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3$$

∂A ist nach aussen orientiert.

ANHANG A

Vorlesungsverzeichnis

ANHANG B

Lösungen von Übungsaufgaben

1. Infimum

siehe Vorlesung 12.

Definition: Sei $M \in \mathbb{R}$ eine (nicht leere) nach unten beschränkte Menge. Eine reelle Zahl $b \in \mathbb{R}$ heisst die grösste untere Schranke von M oder das *Infimum* von M, falls

(i) b ist eine untere Schranke von M

(ii) Ist $\gamma \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von M, dann ist $\gamma \leq b$ ($\Leftrightarrow$ ist $\gamma > b$ ist γ keine untere Schranke von M.)

2. Logarithmenregeln

siehe Vorlesung 15.

(1)

$$\begin{aligned}\log(a^q) &= \log(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)\\ &\overset{K4}{=} \log(a) + \log(a) + \cdots + \log(a)\\ &= q \cdot \log(a) \qquad \square\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}a^{x+y} &\overset{F31}{=} e^{(x+y)\cdot \log a}\\ &= e^{\log(a)x + \log(a)y}\\ &\overset{S20(i)}{=} e^{\log(a)x} \cdot e^{\log(a)y}\\ &= a^x \cdot a^y \qquad \square\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(ab)^x &= \overbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \ldots \cdot a \cdot b}^{x-mal}\\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x-mal} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{x-mal}\\ &= a^x \cdot b^x \qquad \square\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(a^x)^y &= \left.\begin{matrix}\overbrace{\qquad\qquad}^{x-mal}\\ a \cdot a \cdot \ldots \cdot a\\ \vdots\\ a \cdot a \cdot \ldots \cdot a\end{matrix}\right\} y - mal\\ &= a^{xy} \qquad \square\end{aligned}$$

3. Summenregel der Differentialrechnung

BEHAUPTUNG:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Beweis: Über die Definition der Ableitung und die Regeln des Limes *Lemma 16, Seite 37*

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x)+g(x)\big) - \big(f(x_0)+g(x_0)\big)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0)\end{aligned}$$

4. Konstantenregel der Integrationsrechnung

siehe Vorlesung 22. Sei $A := \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Wir beweisen: Die Funktion $\lambda \cdot f$ erfüllt die Bedingung (ii) des Satzes 30. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. $\Rightarrow \exists\, \delta_0 > 0 \quad \forall\, P \in \mathcal{P}(a,b),\ P = \{x_0, \ldots, x_N\}$

$$\left.\begin{aligned}\delta(P) &< \delta_0 \\ \xi_k &\in [x_{k-1}, x_k]\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left| A - \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < |\lambda| \cdot \varepsilon$$

Sei $P = \{x_0, \ldots, x_N\} \in \mathcal{P}(a,b)$ mit $\delta(P) < \delta_0$ und $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\left| \lambda \cdot A - \sum_{k=1}^N \lambda \cdot f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| &= \left| \lambda \cdot A - \lambda \cdot \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \\ &= |\lambda| \left| A - \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < |\lambda|\, \varepsilon\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| A - \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

5. Faltung

siehe Vorlesung 24.

BEHAUPTUNG:

$$\begin{aligned}f * g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(x-t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t)\, dt\end{aligned}$$

Beweis: Durch Variablentransformation $s := x - t$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(x-t)\, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(x-s) g(s)\, (-1) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) g(s)\, ds\end{aligned}$$

Zurück transformieren $s = t$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t)\, dt \qquad \square$$

ANHANG C

Die griechischen Buchstaben

klein	gross	Name
α	A	Alpha
β	B	Beta
χ	X	Chi
δ	Δ	Delta
ε	E	Epsilon
ε		Variertes Epsilon
ϕ	Φ	Phi
φ		Variiertes Phi
γ	Γ	Gamma
η	H	Eta
ι	I	Iota
κ	K	Kappa
λ	Λ	Lambda
μ	M	Mü
ν	N	Nü
ø	O	O
π	Π	Pi
ϖ		Variiertes Pi
θ	Θ	Theta
ρ	P	Rho
ϱ		Variiertes Rho
σ	Σ	Sigma
ς		Variiertes Sigma
τ	T	Tau
υ	Υ	Upsilon
ω	Ω	Omega
ξ	Ξ	Xi
ψ	Ψ	Psi
ζ	Z	Zeta

Index