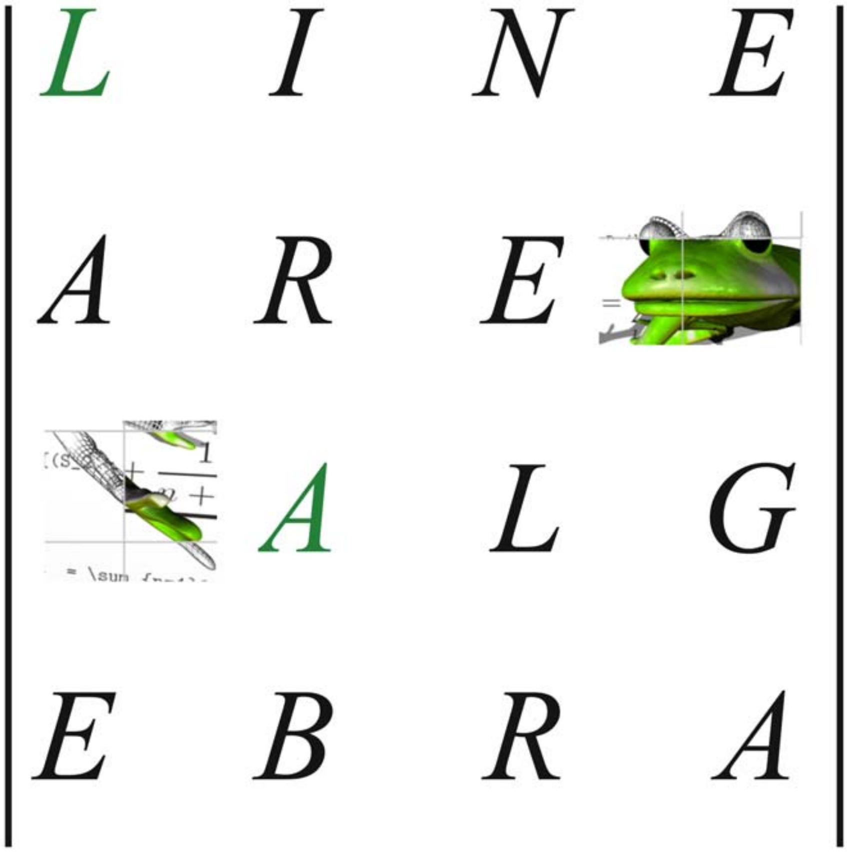

Linear Algebra

WS 01/02

geTEXt von Johannes Bader

Das Dokument entstand aus der Mitschrift der Vorlesung Lineare Algebra I bei Prof. Pink an der ETH Die Nummerierung von Sätzen, Lemmata, Korollaren sowie Beispieln erfolgte abweichend von der Vorlesung durchgehend. Die Kreuzreferenzierungen wurden teilweise, in den neueren Vorlesungen immer, übernommen.

Dieses Dokument wurde mit LaTeX gesetzt. Die einzelnen Teile sind den authorisierten Personen im Postscript und Adobe PDF Format unter `<http://people.ee.ethz.ch/~baderj/linalg/>` zugänglich

Grosse Teile des Dokument wurden aus den teilweise stark gekürzten Notizen von Adrian Bürli abgeschrieben. Der Anhang enthält Notizen der Übungsstunde bei Nina Bogen. Tipps, Anmerkungen und Korrekturen bitte an `baderj@ee.ethz.ch`

Version 1.0 1. Februar 2002,

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Grundlagen

1. Schreibweisen

№1
26.10.01

Algebra: *Formales Rechnen.* Beispielsweise Polynome $(x^2 - 1) + (2x)^2 = (x^2 + 1)^2$. Variabeln werden mit oder ohne Indizes geschrieben. Es gilt folgende Abkürzung:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Quadrat einer Summe:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i
\end{aligned}$$

Distributivgesetz $\rightarrow$

$$\begin{aligned}
&= a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i + \cdot + a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= a_1(a_1 + \cdots + a_n) + a_2(a_1 + \cdots + a_n) + \cdots + a_n(a_1 + \cdots + a_n) \\
&= (a_1 \cdot a_1 + a_1 \cdot a_2 + \cdots + a_1 \cdot a_n) + \\
&\quad (a_2 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + \cdots + a_2 \cdot a_n) + \\
&\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \\
&= (a_n \cdot a_1 + \cdots + a_n \cdot a_2 + \cdots + a_n \cdot a_n) \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + (a_1 a_2 + a_2 a_1) + \\
&\quad (a_1 a_3 + a_3 a_1) + \cdots + (a_1 a_n + a_n a_1) + \\
&\quad (a_2 a_3 + a_3 a_2) + \cdots + (a_{n-1} a_n + a_n a_{n-1} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + (2a_1 a_2 + \cdots + 2a_1 a_n) + (2a_2 a_3 + \cdots + 2a_2 a_n) + \cdots + 2a_{n-1} a_n \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \left(\sum_{j=2}^{n} a_1 a_j\right) + \left(\sum_{j=3}^{n} 2a_2 a_j\right) + \cdots + \left(\sum_{j=n}^{n} 2a_{n-1} a_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i+1}^{n} 2a_i \cdot a_j\right)\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i^2 + \sum_{1 \leq i} \sum_{< j \leq n} 2a_i \cdot a_j \quad \square
\end{aligned}$$

Definition: Lineare Algebra: Alles was mit linearen Gleichungen zu tun hat.

Beispiel 1.1:

$$\begin{array}{r|lll|} I & 3x & +4y & = 1 \\ II & 2x & +3y & = 4 \end{array}$$

2. Lösen von linearen Gleichungssystemen

1. METHODE: Auflösen nach x.

$$x = \frac{4-3y}{2} \xrightarrow{Einsetzen} 3 \cdot \frac{4-3y}{2} + 4y = 1$$

2. METHODE:

$$I - II : \left| \begin{array}{lll} x & +y & = -3 \\ 2x & +3y & = 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} III \\ I \end{array}$$

$$II - 2III : \quad y = 10$$

$$Einsetzen : \quad x = -13 \Rightarrow \text{ Lösungssystem hat 1 Lösung } (x,y) = (-13, 10)$$

Beispiel 1.2:

$$\begin{array}{r|llll|} I & x & +2y & +z & = 5 \\ II & 2x & & -z & = 2 \\ III & & -4y & -3z & = -8 \end{array}$$

Für z beliebig ist (x,y,z) mit $x := \frac{2+z}{2}$, $y := \frac{8-3z}{4}$ die Lösung.

KAPITEL 2

Gaussches Eliminationsverfahren

№2
2.11.01

$$\left|\begin{array}{lccc} a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right|$$

ZEILENOPERATIONEN: $\Rightarrow$ Lösungsmente bleibt gleich

(a) Vertauschen von Zeilen
(b) Multiplizieren (Division) einer Zeile einer Zeile mit einer Konstante $\neq 0$
(c) Addieren (Subtrahieren) eines Vielfaches einer Zeile zu einer anderen.

1. Koeffiziente

$$\begin{array}{cc} & n+1 \text{ Spalten} \\ m \text{ Zeilen} & \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & \ldots & \ldots & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \end{array}$$

VERFAHREN:

(1) Ist die erste Spalte $= 0$, wähle i so, dass $a_{ij} \neq 0$ und vertausche Zeile 1 mit i.
(2) Subtrahiere $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ mal die erste Zeile von der i-ten Zeile für $i \geq 2$.
(3) Wiederhole das Verfahren für die „Submatrix“ $a_{22} - a_{nm}$

Eine Zeile der Form $(0 \cdots 0 b_i)$ entspricht der Gleichung $0 = b$.

Fall 1: Ist das Element in der letzten Zeile von vorletzten Spalte $\neq 0$, so hat das lineares Gleichungssystem keine Lösung

Fall 2: Ist das letzte führende Element $a = 0$, so bedeutet jede Zeile $(0 \cdots 0 | \underbrace{*}_{i\text{te Zeile}} +)$ ausgedrückt werden kann in Termen von $x_{i+1} + \cdots + x_n$

GAUSSSCHES VERFAHREN:

(1) Bringe das LGS in Zeilenstufenform
(2) Entscheide Lösbarkeit
(3) Rückwärtseinsetzen

Die Lösungen sind gegeben durch

$$x_i = b_i - \sum_{j=r+1}^{n} a_i j \cdot x_j$$

Es ist auch möglich mehrere Gleichungssysteme mit selber rechten Seite zusammen zu lösen

Beispiel 2.1:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1l} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{nm} & b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{ml} \end{array}$$

Definition: Bei einem *Homogenen Gleichungssystem* ist die rechte Seite Null, es existiert also die trivial Lösung $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Es ist $r \leq n$

$\Rightarrow$ In der Lösung hat es $n - r$ wählbare Parameter
$\Rightarrow$ Eine Lösung ist eindeutig, wenn $r = n$
$\Rightarrow$ Ein homogenes LGS hat eine nicht trivial Lösung, wenn $r < n$
$\Rightarrow$ Es ist $r = m$ genau dann, wenn das LGS für beliebige rechte Seite eine Lösung gibt.

KAPITEL 3

Matrizenrechnung

Definition: Die *Matrix* bezeichnet ein Schema, mit m Zeilen und n Spalten $\to$ sogenannte $m \times n$-Matrix. №3 9.11.01

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wobei der erste Index die Spalte, der zweite die Zeile bezeichnet.

SPEZIALFÄLLE:

$1 \times n$ **Matrix:** Zeilenvektor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$m \times 1$ **Matrix:** Spaltenvektor $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

1×1 **Matrix:** Skalar, wird mit $\mathbb{R}$ identifiziert.

$n \times n$ **Matrix:** quadratische Matrix

1. Operationen

Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine $m \times n$-Matrix.

Definition: Die zu A transponierte Matrix A^T ist die $n \times m$ Matrix $A^T = (a_{ij})_{\substack{i \le j \le m \\ 1 \le i \le n}} = (a_{ji})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le n \le m}}$

Beispiel 3.1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sei t eine Zahl: $t \cdot A = (ta_{ij})_{mn}$
- Seien A, B zwei $m \times n$-Matrixen: $A \cdot B$ ist $m \times p$-Matrix $A \cdot B = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ij}$
- A_{ij} $m \times n$-Matrix: $A \cdot B$ ist $m \times p$-Matrix

2. Matrizenmultiplikation

$$i = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & b_{1k} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nk} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots \quad a_{ik} \quad \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 5 & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 30 \qquad = skalar$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \qquad = 4 \times 4 - Matrix$$

Diese Multiplikation ermöglicht einfache Rechenoperationen. Sei

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$U \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots\dots\dots\dots & & & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{i1} & \cdots & \lambda \cdot a_{ij} & \cdots & \lambda \cdot a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots\dots\dots\dots & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sei

$$V = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix bewirkt ein Vertauschen der k-ten mit der l-ten Zeile. Sei

$$W = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \lambda & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix bewirkt ein addieren von λ mal der $l$ten Zeile (Spalte in der λ steht) zur k-ten Zeile (Zeile in der λ steht)

$$\begin{aligned} W \cdot A &= \left(\sum_{j=1}^{m} \left\{ \begin{matrix} 1 & i = j \\ \lambda & \substack{i=k \\ j=l} \\ 0 & \text{sonst} \end{matrix} \right\} \cdot d_{jk} \right)_{i,k} \\ &= \left(a_{ik} + \left\{ \begin{cases} \lambda \cdot a_{lk} & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right\} \right)_{i,k} \end{aligned}$$

Rechenregeln:

$$0_{mn} + A = A \qquad A + B = B + A$$
$$(A+B)+C = A+(B+C) \qquad I_m \cdot A = A$$
$$A \cdot I_n = A \qquad (A \cdot B)\cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$
$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B \cdot C \qquad (A^T)^T = A$$
$$(A+B)^T = A^T + B^T \qquad (A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T \quad *$$

Nullmatrix:

$$0_{mn} = (0)_{n}^{m}$$

Einheitsmatrix:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis $*$:

$$((a_{ij})_{i,j} \cdot (b_{ik})_{j,k})^T = \left(\sum_j a_{ij}b_{jk}\right)^T_{i,k} = \left(\sum_j a_{kj}b_{ji}\right)_{i,k}$$
$$= (b_{ij})_{i,j} \cdot (a_{kj})_{j,k} = ((b_{ij})_{i,j})^T \cdot ((a_{jk})_{j,k})^T$$

Definition: Eine $m \times m$-Matrix heisst *invertierbar*, falls eine $m \times m$-Matrix A' existiert, so dass

$$A \cdot A' = I_n$$

A' heisst *Inverse* von A

Satz 1: Ist A invertierbar

(a) gibt es genau eine Inverse
(b) gilt $A \cdot A' = I_n$, $AA' = I_n \Leftrightarrow A'A = I_n$

Beweis: Sei $AA' = I_n$

(1) $\forall$ Spaltenvektoren b der Länge n gilt $b = I_n b = (AA')b = A(A'b)$, dass heisst $A'b$ ist eine Lösung des Linearen Gleichungssystems $Ax = b$
$\Rightarrow$ lösbar für alle g
$\Rightarrow$ die Lösung ist eindeutig
$\Rightarrow$ A' in dem Linearen Gleichungssystems ist auch eindeutig $\square$
(2) $A = I_n A = (AA')A = A(A'A)$, dass heisst, AA' und I_n sind Lösungen des Linearen Gleichungssystems $Ax = A$. Es ist eindeutig lösbar, also $A'A = I_n$ $\square$

№3 16.11.01

3. Explizite Bestimmung von A^{-1}

Beispiel 3.4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Man wendet das Gaussverfahren für die Matrix (A, I_3) an.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right) = (I_3, A^{-1})$$

Satz 2: Jede invertierbare Matrix ist ein Produkt der Elementarmatrizen . Macht man keine Zeilenvertauschungen, so entsteht aus (A, I_n) eine Matrix (R, U)

$$\begin{aligned} V \cdot (A, I_n) &= (R, U) \\ &= (VA, V) \\ &\Rightarrow V = U, \quad UA = R \end{aligned}$$

Setze $L := U^{-1}$

$$A = LR$$

Definition: *Permutationsmatrix* := Einheitsmatrix modifiziert durch Zeilenvertauschungen.

Satz 3: Für jede $m \times n$-Matrix A existieren

- eine $m \times m$-Permutationsmatrix P
- eine $m \times n$-Linksdiagonalmatrix
- eine $m \times n$-Matrix so dass $PA = LR$. L mit Diagonaleinträgen 1, R in Zeilenstufenform. Dies nennt man *LR-Zerlegung*

Satz 4: Sei A eine quadratische Matrix, es sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) A ist invertierbar
(b) Für jedes b ist $Ax = b$ eindeutig lösbar
(c) Die Gleichung $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ hat nur die *Nulllösung*

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$ wurde bereits gezeigt. $(a) \Leftarrow (b)$ ist Spezialfall $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\square$

BEACHTE: $Ax = b \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \\ &(A^{-1}A)x = I_n x = x \\ &\rightsquigarrow Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b \end{aligned}$$

EIGENSCHAFTEN:

(d) A invertierbar $\Rightarrow A^{-1}$ invertierbar, denn $(A^{-1})^{-1} = A$
(e) A, B invertierbar $\Rightarrow A \cdot B$ invertierbar, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
(f) I_n ist invertierbar und $I_n^{-1} = I_n$
(g) A invertierbar $\Rightarrow A^T$ invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Beweis e):

$$\begin{array}{rclcl}(AB)(B^{-1}A^{-1}) & = & (A(BB^{-1})A^{-1}) & = & A(I_nA^{-1}) \\ & = & AA^{-1} & = & I_n\end{array}$$

DREIECKSMATRIX:

(i) Eine Dreiecksmatrix ist invertierbar genau dann, wenn alle Diagonaleinträge $\neq 0$.
(ii) Die Inverse einer Dreiecksmatrix ist wieder eine Dreiecksmatrix.
(iii) Dreiecksmatrix mal Dreiecksmatrix gleich Dreiecksmatrix

ELEMENTARMATRIZEN: Elementarmatrizen sind Matrizen, die aus einer Einheitsmatrix entstehen durch addieren eines Vielfachen ($\neq 0$) einer Zeile zu einer anderen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -\lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

...durch Multiplizieren einer Zeile mit einer Konstanten λ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\lambda} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

...durch Vertauschen zweier Zeilen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

4. Lineare Abbildunge

№5
12.1.02

Definition: Eine Abbildung $f: V \to W$ zwischen zwei Vektorräume heisst *linear*, falls gilt:

(a) $f(v+v') = f(v) + f(v')$
(b) $f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v) \quad \forall\, v, v' \in \mathbb{V}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

BEMERKUNG: f linear $\Rightarrow f(0_V) = 0_W$, denn $f(0_V) = f(\underbrace{0}_{\mathbb{R}} \cdot 0_V) \stackrel{b}{=} 0 \cdot f(0_V) = 0_W$

Beispiel 3.5: $A: m \times n$-Matrix $\to f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$ ist *linear.*

$$(a) \quad A(x+y) \quad = \quad Ax + Ay$$

Beispiel 3.6: $V =$ Raum aller Polynome in $t = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n | a_i \in \mathbb{R}\}$

$$f: \mathbb{V} \to \mathbb{V}, p(t) \mapsto \frac{dp}{dt}(t)$$
$$(\lambda p)' = \underbrace{\lambda}_{=0} \cdot p + \lambda \cdot p' = \lambda p'$$

Beispiel 3.7: $\mathbb{V} = C[a,b] \to \mathbb{R}$, $I: u(t) \mapsto \int_a^b u(t) \cdot k(t) dt$ für beliebiges, festes $k(t) \in C[a,b]$

Sei jetzt $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und
$w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W
Ist $f : V \to W$ linear, so schreibe

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i$$

für jedes $j = 1, \ldots, n$. Die Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$heisst *(Darstellungs-)Matrix von f bezüglich der Basen $v_1, \ldots, w_j, \ldots$*

Beispiel 3.8: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$ wie oben mit $A(a_{ij})_{ij}$. $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Standartbasis.

$$
\begin{aligned}
f(e_j) &= \begin{pmatrix} a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot e_i
\end{aligned}
$$

FAZIT: Die Matrix der linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ bezüglich der Standartbasis ist gleich A.

ALLGEMEIN: Zu jeder $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit Matrix A bezüglich der Basen $v_1, \ldots$ und $w_1, \ldots$, nämlich

$$\underbrace{f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right)}_{\text{endliche LK}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i$$

Beispiel 3.9: Die Matrix der identischen Abbildung $\mathbb{V} \to \mathbb{V}, x \mapsto x$ bezüglich derselben Basis $v_1, \ldots, v_n$ ist stets die Einheitsmatrix I_n

$$f(v_i) \quad = \quad v_i$$

Die Matrix der Nullabbildung $x \mapsto 0$ bezüglich jeder Basis ist die Nullmatrix.

Beispiel 3.10: Drehung im $\mathbb{R}^2$ Standartbais von $\mathbb{R}^n$ (Standartbasis von $\mathbb{R}^n$)

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\delta\\-\sin\delta\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\delta\\\cos\delta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}\cos\delta & -\sin\delta\\ \sin\delta & \cos\delta\end{pmatrix}$$

5. Spiegelung im $\mathbb{R}^2$

Spiegelung an $\langle\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\rangle$ Ansatz: $f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{pmatrix}$$

Beispiel 3.11: $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ heisst *Scherung*

Beispiel 3.12:

$$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}ax\\by\\cz\end{pmatrix}$$

achsenparallele Streckung um die Faktoren a, b, c in X, Y bzw. $z-$Richtung

Allgemeiner: eine Abbildung der Gestalt $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax + b$ heisst *affin-linear*

Satz 5:

(a) Die Komposition zweier linear-Abbildungen $\xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ ist linear: $f \circ g : U \to W$, $w \mapsto (f \circ g)(u) = f(g(u))$

(b)

Sei $u_1, \ldots, u_l$	eine Basis von U
Sei $v_1, \ldots, v_m$	eine Basis von V
Sei $w_1, \ldots, w_n$	eine Basis von W
Sei A	die Matrix von f bezüglich dieser Basis
Sei B	die Matrix von g bezüglich dieser Basis
so ist $A \cdot B$	die Matrix von $f \circ g$ bezüglich dieser Basis

Beweis: $\left.\begin{matrix}\mathbb{R}^l \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n\\ y \mapsto By, x \mapsto Ax\end{matrix}\right\} y \mapsto By \mapsto A(By) = (AB)y$

Satz 6: Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist *bijektiv*, genau dann, wenn $\dim V = \dim W$ und die Darstellungsmatrix (bezüglich beliegier Basen) invertierbar ist. Und dann ist $f^{-1} : W \to V$ $(f(v) = w \Leftrightarrow v = f^{-1}(w))$ wieder linear und hat Darstellungsmatrix A^{-1}

IDEE: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$, A invertierbar $\Rightarrow$

$$Ax = y \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}y$$

Sei $v_1, \dots v_n$ eine Basis von $\mathbb{V}$ und $v'_1, \cdots, v'_n$ eine weitere Basis von $\mathbb{V}$ Sei:

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot v_i$$

mit $t, y \in \mathbb{R}$. Die Matrix $T = (t_{ij})$ heisst *Basiswechselmatrix.*

Satz 7: T ist invertierbar, und $T^{-1} = (t'_{ij})_{ij}$ ist die umgekehrte Basiswechselmatrix.

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} t'_{ij} \cdot v'_i$$

Satz 8: Sei $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ linear und A deren Matrix bezüglich $v_1, \dots, v_n$, B deren Matrix bezüglich $v'_1, \dots, v'_n$. Dann gilt: $\boxed{B = T^{-1} \cdot A \cdot T}$

6. Bezeichnung zu Unterräumen

Sei $f : V \to W$ linear.

Definition:

(i) Die Menge $\text{Kern}(f) := \{v \in \mathbb{V} | f(v) = 0\}$
(ii) Die Menge $\text{Bild}(f) := \{f(v) | v \in \mathbb{V}\}$ heisst *Bild von f*

Satz 9:

(a) $\text{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{V}$
(b) $\text{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W

Beispiel 3.13: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$.

(a) $\text{Kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ homogenes LGS
(b) $\text{Bild}(f) = \{b \in \mathbb{R}^m | \text{das LGS } Ax = b \text{ ist lösbar}\}$

№6
30.11.01

BEACHTE:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \lambda$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \lambda & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} = -1$$

Satz 10: Für je zwei $m \times n$ Matrizen A, B gilt: $det(AB) = (det(A)) \cdot (det(B))$.

Beweis: Das gilt wenn A eine Elementarmatrix ist. Es gilt für jedes Produkt von Elementarmatrizen, denn:

$$\begin{array}{rcll} det(AA'B) & = & det(A) \cdot det(A'B) & \text{falls es gilt für} A \\ & = & det(A) \cdot det(A') \cdot det(B) & \text{falls es gilt für} A' \end{array}$$

BEMERKUNG: $\underbrace{PA = LR}_{Zeilenform} \rightarrow R$ ist invertierbar LR-Zerlegung

R ist invertierbar $\Rightarrow$ Aussage gilt für R anstelle A oder die letzte Zeile von R ist Null
$A = P^{-1}LR \Rightarrow$ letzte Zeilen RB ist Null $\Rightarrow det(RB) = 0 \Rightarrow$ gilt für A. □

Satz 11: A ist invertierbar $\Rightarrow det(A) \cdot det(A^{-1}) = det(AA^{-1}) = det(I_n) = 1$
A nicht invertierbar $\Rightarrow$ LGS $Ax = 0$ hat eine nicht triviale Lösung.
$A = P^{-1}LR \Rightarrow$ LGS $Rx = 0$ hat eine nicht triviale Lösung $\Rightarrow det(R) = 0 \Rightarrow det(A) = 0$ □

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \left(a_i^{j-1}\right)_{i,j}$$

BEHAUPTUNG:

$$\textit{Vandermonde Determinante} \qquad det(A) = \prod_{1 \leq j \leq n} (a_j - a_i) \qquad (1)$$

Entwickeln nach der ersten Zeile. Ziehe Faktoren $(a_i - a_1)$ aus jeder Zeile heraus.

$$= (a_2 - a_1) \cdot \cdots \cdot (a_n - a_1) \det \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \cdots (a_{n-2} - a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} \\ 1 & a_n \end{vmatrix}$$

Satz 12: Für paarweise verschiedene $a_1, \ldots, a_n$ und beliebige $b_1, \ldots, b_n \exists!$ Polynom $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$ vom Grad $\leq n - 1$ mit $f(a_1) = b_i \forall i = 1, \ldots, n$

Beweis: Die Gleichung $c_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_{n-1}a_i^{n-1} = b_i$ sind ein LGS der Form $Ac = b$ mit A wie oben,

$$c = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \exists! \quad \text{LGS} \quad \heartsuit$$

KAPITEL 4

Vektoren

1. Vektorraum

BEMERKUNGEN:

- Es gelten die selben Regeln wie für $\mathbb{R}$
- Ich darf zwei Vektoren nicht mit einander multiplizieren.
- Ich darf zwei Vektoren addieren.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} |a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}| \right\}$$

ADDITION:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

SKALARE MULTIPLIKATION:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

KOORDINATEN: Jeder Vektor $\vec{v}$ hat eine eindeutige Darstellung $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{v}_3 \quad \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ \in\ \mathbb{R}$

Beispiel 4.1: $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ Raum der $m \times n$-Matrizen. Raum der Folgen $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ mit elementweiser Addition und elementweiser skalarer Multiplikation $Abb(X, \mathbb{R}) := \{f : X \Rightarrow \mathbb{R}$, Abbildung $\}$ für eine beliebige Menge. Mit $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ und $(\lambda\cdot f)(x) = \lambda\cdot f(x)$.

RAUM DER POLYNOME:

$$\begin{cases} x \mapsto & | \quad n \text{ beliebig} \\ a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n & | \quad a_1, \cdots, a_n \in R \\ \text{Abbildung } R \mapsto R & \end{cases}$$

Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ heisst *Vektorraum*, falls

(i) $0 \in U$
(ii) $u, u' \in U \Leftrightarrow u + u' \in U \Leftrightarrow u + u' \in U$
(iii) $u \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda u \in U$

Damit ist U selbst ein Vektorraum

Beispiel 4.2:

(i) Gerade oder Ebene durch Nullpunkt in Ausdehnungsraum
(ii) Der Durchschnitt zweier Unterräume ist ein Vektorraum
(iii) Die Lösungsmenge homogener LGS ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$

DENN: $Ax = 0$ hat Lösung 0
$Ax = 0, \quad Ay = 0 \Leftrightarrow A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$
$A(\lambda x) = (A\lambda)x = \lambda(Ax) = \lambda \cdot 0 = 0.$

2. Linearkombinationen

7.12.01 №7 7.12.01

Sei V ein Vektorraum, und $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$

Definition: Eine *Linearkombination (LK)* von $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ ist eine Antwort $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in \mathbb{R}$

Linearkombination: $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in \mathbb{R}$ (2)

ZENTRALE FRAGE:

(a) Welche Vektoren in V kann man so darstellen?
(b) Sind die $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ eindeutig bestimmt?

Beispiel 4.3: $0 = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n$. *Nullvektor*

Definition: Für $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ setzen wir $\langle S \rangle := \{\lambda_1 v_1, \cdots, \lambda_n v_n \quad | \quad \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n \in \mathbb{R}\}$ *"Erzeugnis von S"*

BEHAUPTUNG: $\langle S \rangle$ ist ein Unterraum von V

Beweis:

(i) $0 \in \langle S \rangle$: siehe oben

(ii) $v = \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n \in \langle S \rangle$
$\lambda_1' v_1 + \cdots \lambda_n' v_n \in \langle S \rangle$
$\Rightarrow v + v' = \cdots = (\lambda + \lambda')v_1 + \cdots + (\lambda_n + \lambda_n')v_n \in \langle S \rangle$

(iii) $\lambda \in \mathbb{R}$, v wie oben $\Rightarrow \lambda v = (\lambda\lambda_1)v_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n)v_n \in \langle S \rangle$

Definition: Sei U ein Unterraum in V Eine Teilmenge $S = \{v_1 + \cdots + v_n\} \subset U$ mit $\langle S \rangle = U$ heisst ein *endliches Erzeugungssystem in U*

BEMERKUNG: Für S unendlich besteht $\langle S \rangle$ aus den unendlichen LK von Vektoren in S

Beispiel 4.4: Die Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1, x, x^2, \ldots, x^n$ erzeugen den Raum der Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$

$$\langle S \rangle = \{f : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad | a_n \in \mathbb{R}\}$$

Definition: V heisst *endlich erzeugt*, wenn V ein endliches Erzeugungssystem besitzt.

Beispiel 4.5: Der Raum aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von beliegigem Grad ist nicht endlich erzeugt.

Beweis: Sei $S = \{f_1, \dots, f_n\} \subset V$ eine Teilmenge. Sei $m \in \mathbb{N}$, so dass alle f_i Grad $\leq n$ haben. Dann ist $f(x) = x^{n+1} \notin \langle S \rangle$ Denn jeder Polynom in $\langle S \rangle$ hat Grad $\leq n$

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x^j \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x^j \\
&= \sum_{j=0}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ij}) x^j \\
\text{Wäre } x^{m+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i &= \sum_{j=0}^{m} a_j x^j
\end{aligned}
$$

definieren wir die Funktion $x \to x^{m+1} - \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ identisch Null. Ein normiertes Polynom vom Grad $n+1$ hat höchstens $n+1$ Nullstellen. Widerspruch.

Beispiel 4.6: $\binom{1}{0}$, $\binom{0}{1}$,$\binom{1}{1}$ ist Erzeugende in $\mathbb{R}^2$

z.B.: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b-a) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Definition: $v_1 + \dots + v_n$ heissen linear unabhängig falls der Nullvektor nur als triviale Linearkombination darstellbar ist, d.h. falls gilt:

$$
\begin{aligned}
&\forall\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \\
&\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0
\end{aligned}
$$

Andernfalls heissen sie *linear abhängig*

BEHAUPTUNG: linear unabhängig $\Leftrightarrow$ In jeder Linearkombination sind die λ_i eindeutig.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\text{Sei } v &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \text{ gegeben und } \lambda_i' \\
\text{Dann ist } v &= \lambda_1' v_1 + \dots + \lambda_n' v_n \\
&\Leftrightarrow\ 0 = v_1' - v = (\lambda_1' - \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda_n' - \lambda_n) v_n \\
\text{linear unabhängig } &\Leftrightarrow\ \lambda_1' - \lambda = \dots = \lambda_n' - \lambda_n = 0 \\
&\Leftrightarrow\ \lambda_1' - \lambda, \dots, \lambda_1' - \lambda_n
\end{aligned}
$$

BEHAUPTUNG: $v_1, \cdots, v_n$ sind linear abhängig genau dann, wenn eine der v_i eine Linearkombination der übrigen ist.

Beweis: $\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n = 0$ mit $\lambda_i \neq 0$ für ein i.

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \lambda_i v_i = -\lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_{i-1} v_{i-1} - \lambda_{i+1} v_{i+1} - \dots - \lambda_n v_n \\
&\Leftrightarrow\ v_i = \tfrac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \dots + \tfrac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} + \tfrac{\lambda i+1}{\lambda_i} v_{i+1} + \dots + \tfrac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n
\end{aligned}
$$

Das zeigt „genau dann“ ...

Beispiel 4.7: $\binom{1}{0}$, $\binom{0}{1}$,$\binom{1}{1}$ sind linear abhängig, denn $\binom{1}{1} = 1 \cdot \binom{1}{0} + 1 \cdot \binom{0}{1}$

Beispiel 4.8: Ist eine der $v_i = 0$, so sind $v_1, \cdots, v_n$ linear abhängig. Auch $\{0\}$ ist linear abhängig. $1 \cdot 0 = 0$

Definition: $\{v_1, \dots, v_n\}$ heisst *Basis von V*, wenn jedes $v \in V$ eine eindeutige Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ ist.

Basis von V $\{v_1, \dots, v_n\}$ (3)

ÄQUIVALENT: $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist *linear unabhängiges Erzeugungssystem*

3. Standartbasis des $\mathbb{R}^n$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$

Denn $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist die eindeutige Linearkombination für beliebige v

Satz 13: Jedes Erzeugnissystem von V enthält eine Basis

Beweis: Sei $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ ein erzeugendes System von V. Ist S linear abhängig, dann existiert i mit $v_i \in < S \backslash \{v_i\} >$.

BEHAUPTUNG: $S \backslash \{v_i\}$ ist erzeugendes System von V. Ohne Beschränkung der Algemeinheit (OBdA) sei $i = n$. Sei $v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$. Jeder $v \in V$ lässt sich schreiben als:

$$\begin{aligned} v &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n \qquad \text{mit } \mu_i \in \mathbb{R} \\ &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-1} v_{n-1} + \mu_n(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}) \\ &= (\mu_1 + \mu_n \lambda_1) v_1 + \dots + (\mu_{n-1} + \mu_{n-1} \lambda_{n-1}) v_{n-1} \quad \in < \{v_1, \dots, v_{n-1} > . \end{aligned}$$

Wiederhole solange nötig. Das Resultat ist eine linear unabhängige Teilmenge $S' \subset S$ mit $\langle S' \rangle = \langle S \rangle = V$. Falls S unendlich ist, anders ...

BEMERKUNG: $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

FOLGE: Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis.

Satz 14:

Je zwei Basen von V haben die selbe Anzahl Elemente (4)

Definition: Die Anzahl Elemente heisst die *Dimension von V*

Beispiel 4.9: Die Dimension des $R^n = n$ №8 14.12.01

ERRINNERUNG: $v_1, \dots, v_n \quad \in V$ heissen *Basen* $\mathbb{V}$, falls jedes $v \in V$ eine eindeutige Linearkombination $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ ist mit $a_i \in \mathbb{R}$

ÄQUIVALENT: linear unabhängiges Erzeugungssystem

TYPISCHE AUFGABEN:

(a) Sind diese Eigenschaften erfüllt
(b) Finde eine Basis
Beispiel 4.10: A eine $m \times n$-Matrix. $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ Gaussverfahren liefert $\mathbb{R}$ in Zeilenstufenform. $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Rx = 0\}$.

$$U = \left\{ x_{i_1}, \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + x_{i_r} \begin{pmatrix} v_{r1} \\ \vdots \\ v_{rn} \end{pmatrix} \right\} x_{i_1}, \ldots, x_{i_r} \in \mathbb{R}$$

Die $\begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} v_{r1} \\ \vdots \\ v_{rn} \end{pmatrix}$

Beispiel 4.11:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r \;\middle|\; \begin{matrix} rx_1 + 5x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ heisst eine Basis von U

(c) Drücke v aus als Linearkombination einer Basis. Das heisst für jedes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ löse die Gleichung $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ mit $a_1 \in \mathbb{R}$. Sind $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ oder

$B = (v_1, \ldots, v_n) = n \times n$-Matrix. $B \cdot a = v$. $\quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_m \\ \vdots & & \vdots \\ v_n & \cdots & v_m \end{pmatrix}}_{B} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 a_1 + \cdots + v_n a_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

FOLGE: $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ bilden eine Basis in $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn die $n \times n$-Matrix $(v_1, \ldots, v_n)$ invertierbar ist.

(d) Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von V, so sei $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ mit $a_i j \in \mathbb{R}$. Die Matrix $(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ heisst *Basiswechselmatrix*

Basiswechselmatrix: $\quad (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \quad$ (5)

4. Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \qquad i^2 = -1$

$$\begin{aligned} z = a + bi \quad &\Rightarrow \quad \overline{z} = a - bi \\ &\Rightarrow \quad z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - bi^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \\ \frac{z}{w} \quad &= \quad \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} \end{aligned}$$

BEMERKUNG: $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ ist reel ≥ 0; und 0 genau dann wenn $z = 0$

Komplexe Vektorräume:

Beispiel 4.12: $\mathbb{C}^n$

5. Euklidische Vektorräume

$$\begin{aligned} |OP| &= \sqrt{\sqrt{(x^2+y^2)}^2 + z^2} \\ &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}$$

allgemeiner: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $||x|| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ einheitliche Länge von x *Standart Skalarprodukt auf* $\mathbb{R}^n$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
$\to (x,y) := \langle x,y \rangle := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ Damit ist $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ Für $x, y \neq 0$ gilt $(x,y) = ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos\theta$ wobei θ der Winkel zwischen x, y ist.

Definition: Ein *Skalarprodukt* auf ein einen reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$, so dass für alle $v, w, w' \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

(a)

$$\begin{aligned} (v, w+w') &= (v,w) + (v,w') \\ (v, \alpha w) &= \alpha(v,w) \end{aligned}$$

(Das heisst (v,w) ist linear in w)

(b) $(v,w) = (w,v)$. (Das heisst symmetrisch)

(c)

$$\begin{aligned} (v,v) &\leq 0 \text{ und} \\ (v,v) &= 0 \text{ genau dann, wenn } v = 0 \text{ ist} \end{aligned}$$

Das heisst $(.,.)$ ist positiv definiert.

Bemerkung: $(a) \wedge (b) \Rightarrow (v,w)$ linear in V

Definition: Ist $(.,.)$ ein Skalarprodukt auf V, so heisst $||v|| := \sqrt{(v,v)}$ die zugehörige *entstehende Norm*

Beispiel 4.13: $V := C[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$. Setze

$$(f,g) := \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

Das ist ein Skalarprodukt auf V!

(a)

$$\begin{aligned} (f, g_1 + g_2) &= \int_a^b f(t)[g_1(t) + g_2(t)]\,dt \\ &= \int_a^b [f(t)g_1(t) + f(t)g_2(t)]\,dt \\ &= \int_a^b f(t)g_1(t)\,dt + \int_a^b f(t)g_2(t) = (f,g_1) + (f,g_2) \end{aligned}$$

(b) ✓

(c)

$$(f,f) = \int_a^b \underbrace{f(t)^2}_{\geq 0}\, dt \geq 0$$

$(f,f) > 0$ falls f nicht identisch Null

Sei V ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $(.,.)$ („*euklidischer Vektorraum*"). №9 21.12.01
Setze

$$||v|| := \sqrt{(v,v)^2} \quad \in \mathbb{R}, \geq 0$$

BEHAUPTUNG: $||\ ||$ erfüllt die Eigenschaften

(i) $||v|| \geq 0$, und $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
(ii) $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in V$
(iii) $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$

BEMERKUNG: Eine Abbildung $v \mapsto ||v|| \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (a)-(c), heisst eine *Norm auf* V. Eine Norm der Form $||v|| = \sqrt{(v,v)}$ heisst *euklidische Norm.*

Norm auf V*:* $\quad v \mapsto ||v|| \in \mathbb{R}$ mit Eigenschaften (a)-(b) (6)

euklidische Norm: $\quad ||v|| = \sqrt{(v,v)}$ (7)

EIGENSCHAFT: $|(v,w)| \leq ||v|| \cdot ||w||$

Definition: v, w heissen *orthogonal*, wenn $(v,w) = 0$ ist.

Satz 15: v, w orthogonal $\Rightarrow ||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$ (Pythagoras)

Beweis:

$$\begin{aligned}(v+w, v+w) &\overset{Satz}{=} (v+w, v) + (v+w, w) \\ &\overset{Satz}{=} (v,v) + (w,v) + (v,w) + (w,w) \\ &\overset{Satz}{=} ||v||^2 + \underbrace{2(v,w)}_{=0} + ||w||^2 \qquad \square\end{aligned}$$

Definition: Ein $v \in V$ mit $||v|| = 1$ heisst ein *Einheitsvektor*

BEHAUPTUNG: Seien $e_1, \ldots, e_r$ paarweise orthogonale Einheitsvektoren. Für jedes $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda_i = (e_i, v)$

Beweis: Beachte

$$\begin{aligned}(e_1, e_j) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \\ \Rightarrow \quad (e_i, v) &= \left(e_i, \textstyle\sum_{j=1}^r \lambda_j e_j\right) = \textstyle\sum_{j=1}^r \lambda_j \cdot (e_i, e_j) = \lambda_i \cdot 1 \qquad \square\end{aligned}$$

FOLGE: $e_1, \ldots, e_r$ sind linear unabhängig

FOLGE: Ist $n = \dim V$, so bilden je n paarweise orthogonale Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V, eine *Orthonormalbasis*

FOLGE: Ist $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von V, dann gilt für jedes $v \in V$

$$v = (e_1, v) \cdot e_1 + \cdots + (e_n, v) \cdot e_n$$

Die Standartbasis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^n$ ist eine Orthonormalbasis bezüglich dem *Standartskalarprodukt*

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

BEMERKUNG:

$$\begin{aligned} x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (x, y) &= x^T \cdot y \\ &= (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$f_i^T f_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

$(f_i^T, f_j)_{i,j}^n = 1$

FOLGE: Gegebene Vektoren $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}^n$ heissen eine Orthonormalbasis, genau dann, wenn die Matrix $A = (f_1, \dots, f_n)$ die Gleichung $A^T \cdot A = I_n$ erfüllt. Eine solche Matrix heisst *orthogonal*

Beispiel 4.14:

$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ist orthogonal

BEACHTE: $e_1, \dots, e_n$ *paarweise orthogonal* heisst $\forall\, i \neq j, e_i, e_j$ orthogonal

6. Orthogonale Projektion

Sei $e_1, \dots, e_r$ eine Orthogonalbasis eines Vektorraums V. Für jedes $v \in V$ setze

$$\overline{v} := (e_1, v) \cdot e_1 + \cdots + (e_r, v) \cdot e_r \in U$$

BEHAUPTUNG: $v - \overline{v}$ ist orthogonal zu allen Vektoren in U

Beweis:

$$\begin{aligned} (e_i, v - v^2) &= (e_i, v) - \underbrace{(e_i, \overline{v})}_{(e_i, v)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für jedes $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r \in U$ gilt

$$(u, v - \overline{v}) = \sum \lambda_i \cdot (e_1, v - \overline{v}) = 0 \qquad \square$$

7. Schmitt'sche Orthogonalisierungsverfahren

Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V

1. SCHRITT: Setze

$$e_1 := \frac{v_1}{||v_1||}$$

$(r+1)$TER SCHRITT: Seien $e_1, \dots, e_r$ bereits bekann. (Paarweise orthogonale Einheitsvektoren)

Setze

$$w_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} (e_i, v_{r+1}) \cdot e_i$$

und

$$e_{r+1} = \frac{w_{r+1}}{||w_{r+1}||}$$

Dieses Verfahren liefert eine ONB $e_1, \dots, e_n$ von V mit der Eigenschaft

$$\langle\{e_1, \dots, e_r\}\rangle = \langle\{v_1, \dots, v_r\}\rangle$$

für alle $r = 1, \dots, n$

Beispiel 4.15: $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \binom{5}{12}$,$v_2 = \binom{0}{1}$

$$\begin{aligned} ||v_1|| &= \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \\ \Rightarrow \quad e_1 &= \tfrac{1}{13}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix} \\ w_2 &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \left(\tfrac{1}{13}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \tfrac{1}{13}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \tfrac{13}{169}\tfrac{5}{12} = \tfrac{1}{169}\begin{pmatrix}-5 \cdot 12\\169 - 12 \cdot 12\end{pmatrix} \\ &= \tfrac{5}{169}\begin{pmatrix}-12\\5\end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad e_2 &= \tfrac{1}{13}\begin{pmatrix}-12\\5\end{pmatrix} \end{aligned}$$

BEHAUPTUNG: Die orthogonale Projektion $v \mapsto \overline{v}$ hat die folgende Eigenschaft: $\overline{v}$ ist das eindeutige Element von U für den $||v - \overline{v}||$ minimal wird.

Beweis: Für jedes $v \in U$ gilt

$$\begin{aligned} ||v - u||^2 &= ||(v - \overline{v} + \underbrace{(\overline{v} - u)}_{\in U}||^2 \\ &= ||v - \overline{v}||^2 + \underbrace{||\overline{v} - u||}_{\geq 0\text{ , 0 genau für } u = \overline{v}} \end{aligned}$$

Beachte ein LGS $Ax = b$ mit A der Grösse $m \times n$, zum Beispiel $m > n$. Suche x, so dass $||Ax - b||$ minimal wird.

Satz 16: Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ in der Gleichung

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$$

minimiert den Ausdruck $||Ax - b||$

ANSATZ: $y = \alpha + \beta$, gesucht α,β, so dass

$$\sum_{i=1}^{m} (y_i - At_i - b)^2$$

minimal ist.

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

8. Lineare Abbildunge

№10
12.1.02

Definition: Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei Vektorräume heisst *linear*, falls gilt:

(a) $f(v + v') = f(v) + f(v')$
(b) $f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v) \quad \forall\, v, v' \in \mathbb{V}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

BEMERKUNG: f linear $\Rightarrow f(0_V) = 0_W$, denn $f(0_V) = f(\underbrace{0}_{\mathbb{R}} \cdot 0_V) \overset{b}{=} 0 \cdot f(0_V) = 0_W$

Beispiel 4.16: $A : m \times n$-Matrix $\to f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$ ist *linear*.

$$(a) \quad A(x + y) \quad = \quad Ax + Ay$$

Beispiel 4.17: $V =$ Raum aller Polynom in $t = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n | a_i \in \mathbb{R}\}$

$$f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}, p(t) \mapsto \tfrac{dp}{dt}(t)$$
$$(\lambda p)' = \underbrace{\lambda}_{=0} \cdot p + \lambda \cdot p' = \lambda p'$$

Beispiel 4.18: $\mathbb{V} = C[a, b] \to \mathbb{R}$, $I : u(t) \mapsto \int_a^b u(t) \cdot k(t) dt$ für beliebiges, festes $k(t) \in C[a, b]$
Sei jetzt $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und
$w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W
Ist $f : V \to W$ linear, so schreibe

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i$$

für jedes $j = 1, \ldots, n$. Die Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$heisst *(Darstellungs-)Matrix von f bezüglich der Basen $v_1, \ldots, w_j, \ldots$*

Beispiel 4.19: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$ wie oben mit $A(a_{ij})_{ij}$. $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Standartbasis.

$$f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot e_i$$

FAZIT: Die Matrix der linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ bezüglich der Standartbasis ist gleich A.

ALLGEMEIN: Zu jeder $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit Matrix A bezüglich der Basen $v_1, \dots$ und $w_1, \dots$, nämlich

$$\underbrace{f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right)}_{\text{endliche LK}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i$$

Beispiel 4.20: Die Matrix der identischen Abbildung $\mathbb{V} \to \mathbb{V}, x \mapsto x$ bezüglich derselben Basis $v_1, \dots, v_n$ ist stets die Einheitsmatrix I_n

$$f(v_i) \quad = \quad v_i$$

Die Matrix der Nullabbildung $x \mapsto 0$ bezüglich jeder Basis ist die Nullmatrix.

Beispiel 4.21: Drehung im $\mathbb{R}^2$ Standartbais von $\mathbb{R}^n$ (Standartbasis von $\mathbb{R}^n$)

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta \\ -\sin\delta \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix}$$

9. Spiegelung im $\mathbb{R}^2$

Spiegelung an $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ ANSATZ: $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A &= \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Beispiel 4.22: $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ heisst *Scherung*

Beispiel 4.23:

$$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}ax\\by\\cz\end{pmatrix}$$

achsenparallele Streckung um die Faktoren a, b, c in X, Y bzw. $z-$Richtung

Allgemeiner: eine Abbildung der Gestalt $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax + b$ heisst *affin-linear*

Satz 17:

(a) Die Komposition zweier linear-Abbildungen $\xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ ist linear: $f \circ g : U \to W$, $w \mapsto (f \circ g)(u) = f(g(u))$

(b)

Sei $u_1, \ldots, u_l$	eine Basis von U
Sei $v_1, \ldots, v_m$	eine Basis von V
Sei $w_1, \ldots, w_n$	eine Basis von W
Sei A	die Matrix von f bezüglich dieser Basis
Sei B	die Matrix von g bezüglich dieser Basis
so ist $A \cdot B$	die Matrix von $f \circ g$ bezüglich dieser Basis

Beweis: $\left.\begin{array}{c}\mathbb{R}^l \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n\\ y \mapsto By, x \mapsto Ax\end{array}\right\} y \mapsto By \mapsto A(By) = (AB)y$

Satz 18: Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist *bijektiv*, genau dann, wenn $\dim V = \dim W$ und die Darstellungsmatrix (bezüglich beliegier Basen) invertierbar ist. Und dann ist $f^{-1} : W \to V$ $(f(v) = w \Leftrightarrow v = f^{-1}(w))$ wieder linear und hat Darstellungsmatrix A^{-1}

Idee: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$, A invertierbar $\Rightarrow$

$$Ax = y \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}y$$

Sei $v_1, \ldots v_n$ eine Basis von $\mathbb{V}$ und $v'_1, \cdots, v'_n$ eine weitere Basis von $\mathbb{V}$ Sei:

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot v_i$$

mit $t, y \in \mathbb{R}$. Die Matrix $T = (t_{ij})$ heisst *Basiswechselmatrix.*

Satz 19: T ist invertierbar, und $T^{-1} = (t'_{ij})_{ij}$ ist die umgekehrte Basiswechselmatrix.

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} t'_{ij} \cdot v'_i$$

Satz 20: Sei $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ linear und A deren Matrix bezüglich $v_1, \ldots, v_n$, B deren Matrix bezüglich $v_1', \ldots, v_n'$. Dann gilt: $\boxed{B = T^{-1} \cdot A \cdot T}$

10. Bezeichnung zu Unterräumen

Sei $f : V \to W$ linear.

Definition:

(i) Die Menge $\text{Kern}(f) := \{v \in \mathbb{V} | f(v) = 0\}$
(ii) Die Menge $\text{Bild}(f) := \{f(v) | v \in \mathbb{V}\}$ heisst *Bild von f*

Satz 21:

(a) $\text{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{V}$
(b) $\text{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W

Beispiel 4.24: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$.

(a) $\text{Kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ homogenes LGS
(b) $\text{Bild}(f) = \{b \in \mathbb{R}^m | \text{das LGS } Ax = b \text{ ist lösbar}\}$

№11
18.1.02

Erinnerung: $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ linear.

(a) $\text{Kern} f = \{v \in \mathbb{V} | f(v) = 0\}$ ist UR von $\mathbb{V}$
(b) $\text{Bild}(f) = \ldots$ ist UR von $\mathbb{W}$

Bemerkung: Die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix bilden ein EZ vom Bild F

Satz 22:

(a) f ist injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern}(f) = \{0\}$
(b) f ist surjektiv $\Leftrightarrow \text{Bild}(f) = \mathbb{W}$

Satz 23: $\dim \text{Kern}(f) + \dim \text{Bild}(f) = \dim \mathbb{V}$ bei Abbildungen $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$

Definition: Der *Zeilenrang* bzw. *Spaltenrang* ist die Zahl linear unabhängiger Zeilen bzw. Spalten einer Matrix.

Bemerkung: $\dim\{Ax | x \in \mathbb{R}^m\} = \text{Spaltenrang}(A)$

Satz 24: S, T invertierbar $\Rightarrow \text{Spaltenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(SAT)$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathit{Spaltenrang}(S \cdot A \cdot T) &= \dim\{SATx | x \in \mathbb{R}^n\} \\ &\Leftrightarrow Tx = y \quad x = T^{-1}y \\ &= \dim\{SAy | y \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \dim\{Ay | y \in \mathbb{R}^n\} = \mathit{Spaltenrang}(A) \quad \square \end{aligned}$$

Satz 25: Für jede Matrix A existieren invertierbare Matrizen S, T so dass

$$SAT = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ & \ddots & & \vdots & \\ 0 & \ldots & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & & & \vdots & \end{pmatrix}$$

mit Rang A

Satz 26: $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(A) = \text{Rang}(A)$

Beweis: Mit S, T wie oben gilt:

$$Spaltenrang(A) = Spaltenrang(SAT) = r = Rang(A)$$
$$Zeilenrang(A) = Spaltenrang(A^T) = Spaltenrang(T^T A^T S^T) = Spaltenrang((SAT)^T)$$

11. Orthogonale Abbildung

Satz 27: Für jede $n \times n$ Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) A orthogonal $A^T A = I_m$
(b) Die Spalten von A sind eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$
(c) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \to Ax$ ist Längenform $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ $||x|| = ||Ax||$
(d) f ist orthogonal

Beweis: $a) \Rightarrow b)$

$$\begin{aligned}(Ax, Ay) &= (Ax)^T (Ay) - x^T \overbrace{A^T A}^{I_n} \\ &= x^T I_n y = x^T y = (x, y)\end{aligned}$$

Bemerkung: A orthogonal $\Leftrightarrow \det(A) = \pm 1$ №12 25.1.02
Sei $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ eine lineare Abbildung eines reellen (komplexen) endlichen Vektorraums in sich.

Ziel: Finde eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathbb{V}$ bezüglich der die *Darstellungsmatrix* besonders einfach ist.

Definition:

(a) f heisst *diagonalisierbar*, falls eine Basis existiert, für die die Matrix von f eine Diagonalmatrix ist.
(b) f heisst *trigonalisierbar*, falls eine Basis existiert, für die die Matrix von f eine Rechtsdreiecksmatrix ist.

Sei $v'_1, \ldots, v'_n$ eine gegebene Basis, sei A die Matrix von f bezüglich $v'_1, \ldots, v'_n$.

Erinnerung: Die Matrix von f bezüglich $v_1, \ldots, v_n$ ist $T \cdot A \cdot T^{-1}$, wobei T die entsprechende *Basiswechselmatrix* ist. T kann eine beliebige invertierbare $n \times n$-Matrix sein über $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

Definition: $T \cdot A \cdot T^{-1}$ heisst *ähnlich zu A*

Definition: Eine reelle (komplexe) Matrix $(n \times n)$ A heisst

(1) *diagonalisierbar*, falls sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.
(2) *trigonalisierbar*, falls sie ähnlich zu einer Rechtsdreiecksmatrix ist.

Frage: Wann ist eine Matrix A diago-/trigonalisierbar?

Erinnerung: $f(v_j) = \sum_{i=1}^n k_{ij} v_i \Leftrightarrow$ Matrix von f bezüglich $v_1, \ldots, v_n$ ist $(b_{ij})_{i,j}$ $\quad b_{ij} \leq \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\text{Diagonalmatrix} &\Leftrightarrow v_i \neq 0 : b_{ij} = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{für alle } j \text{ ist: } f(v_j) = b_{ij} v_j\end{aligned}$$

12. Eigenvektor

Definition: Ein Vektor $0 \neq v \in \mathbb{V}$ heisst *Eigenvektor* von f zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, wenn gilt: $f(v) = \lambda \cdot v$. Wichtig! λ ist durch v eindeutig bestimmt.

Definition: λ heisst *Eigenwert* von f, wenn λ der Eigenwert zu einem geeigneten Eigenvektor ist.

FOLGE: f ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\mathbb{V}$ besitzt Basis $v_1, \ldots, v_n$ aus Eigenwerten von f. Mit $f(v_j) = \lambda_{ij} v_j$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Definition: Im Fall der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto A$ heissen v, λ auch Eigenvektor und Eigenwert von A

ZIEL: Bestimme alle Eingenwerte und -vektoren von A. Sei $A = (a_{ij})_{i,j}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann ist $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)x = Ax - \lambda I_n \cdot x = Ax - \lambda y = 0$.

BEACHTE:

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \ldots\ldots\ldots\ldots & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{mn} - \lambda \end{pmatrix}$$

FOLGE: Die Eigenvektoren zum Eigenwert von A sind genau die Lösungen des Linearengleichungssystems $(A - \lambda \cdot I_n)x = 0$

Definition: Für jeden Eigenwert von A heisst die Lösungsmenge der Eigenwert.

Definition: Die Dimension des Eigenraumen zu λ heisst die *geometrische Vielfachheit* von λ

BEACHTE: λ ist Eigenwert von A

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)x = 0 \text{ hat nicht triviale Lösungen} \\ &\Leftrightarrow A - \lambda \cdot I_n \text{ ist nicht invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_m) = 0 \end{aligned}$$

Definition: Sei t eine Unbestimmte. Die Determinante

$$\varphi_A(t) := \det(A - t \cdot I_n) - \det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{21} & a_{22} - t & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{n1} & & & a_{nn} - t \end{pmatrix}$$

heisst der *charakteristische Polynom* von A. Er ist vom Grad n.

(1) Bestimme $\varphi(t)$
(2) Bestimme alle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ davon.
(3) Für jedes λ_i bestimme eine Basis des Eigenraumes $\{x \mid (A - \lambda_i I_k)x = 0\}$
(4) A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Alle dieser Basis-Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$

BEHAUPTUNG: *Vergleiche Aufgabe 4.3* Für jedes $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ mit $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ konvergiert die Folge $A^n \cdot q$ gegen den Vektor

$$\frac{1}{70} \begin{pmatrix} 41 \\ 18 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Beweis: Schreibe $v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3$ mit $\mu_i \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow A^n \cdot q &= \mu_1(A^n v_1) + \mu_2(A^n v_2) + \mu_3(A^n v_3) \\ &= \mu_1 \lambda_1^n v_1 + \mu_2 \lambda_2^n v_2 + \underbrace{\mu_3 \lambda_3^n v_3}_{=0}\end{aligned}$$

$\lambda_1 v_1 = v_1 \quad \lambda_2^n v_2 \to 0$

$$\Rightarrow A^n q \overset{n\to\infty}{\to} \mu_1 v_1$$

Der Wert von $\mu_1 : 1 = q_1 + q_2 + q_3 = \mu_1(\underbrace{41 + 18 + 11}_{=70}) + \mu_1 \cdot 0 \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{70}$ □ №13 1.2.02

Erinnerung: A sei eine $m \times n$-Matrix über $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

Definition: $0 \neq x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ heisst *Eigenvektor von* A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ falls $Ax = \lambda x$ effektiven Verfahren.

(1) Bestimme charakteristischen Polynom $\varphi_A(t) = \det(A - \lambda I_n)$
(2) Eigenwert = Nullstellen von $\varphi_A(t)$
(3) Für jeden Eigenwert λ bestimme eine Basis des Eigenraumes. Dessen Dimension $m_{geo}(\lambda)$ $\{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) | (A - \lambda I)x = 0\}$

Satz 28: diese Basisvektoren zusammen vom Eigenwert λ sind linear unabhängig

Folge: A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Basis aus Eigenvektoren von $A \Leftrightarrow \sum_{\lambda EW} m_{geo}(\lambda) = n$. Im allgemeinen gilt $\leq$

Folge: A Besitzt $\varphi_A(t)$ gegen n verschiedener Nullstellen $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ so ist A diagonalisierbar. Denn für jede Nullstelle $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$ existiert eine Eigenvektor v_i und die $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis $\det \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$

Satz 29: Ähnliche Matizen haben denselben charakteristischen Polynom.

Beweis:

$$\begin{aligned}\det(T^{-1} \cdot A \cdot T - t \cdot I_n) &= \det(T^{-1} \cdot A \cdot T - T^{-1} \cdot (t \cdot I_n) \cdot T) \\ &= \det(T^{-1} \cdot (A - t \cdot I_n) \cdot T) \\ &= \underbrace{\det(T^{-1})}_{\det(T)^{-1}} \cdot \det(A - t \cdot I_n) \cdot \det(T) \\ &= \det(A - t \cdot I_n) \quad \square\end{aligned}$$

Satz 30:

(a) Eine reelle $m \times n$-Matrix A ist trigonalisierbar über $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ alle komplexen Nullstellen von $\varphi_A(t)$ liegen in $\mathbb{R}$
(b) Jede komplexe $m \times n$-Matrix ist trigonalisierbar

Beweis a): $\Rightarrow$**:** Sei T so dass

$$T^{-1} A T = \beta = \begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

ist.

$$\Rightarrow \varphi_A(t) = \varphi_B(t) = \det \begin{pmatrix} b_{11} - t & & b_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} - t \end{pmatrix} = (b_{11} - t) \ldots (b_{nn} - t)$$

Die Nullstellen b_{ii} liegen in $\mathbb{R}$. $\square$

Beispiel 4.25:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \quad c = \cos\theta, \quad s = \sin\theta \\ \varphi_A(t) &= \begin{vmatrix} c-t & -s \\ s & c-t \end{vmatrix} = (c-t)^2 + (si)^2 \\ &= \big(t - (c+is)\big) \cdot \big(t - (c-is)\big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nullstellen in } \mathbb{R} &\Leftrightarrow s = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta = n\pi \text{ für } n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow A = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A ist immer diagonalisierbar über $\mathbb{C}$. ($c \pm is = e^{\pm i\theta}$)

$$A'AT = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad T \text{ über } \mathbb{C}$$

Beispiel 4.26: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$, $\varphi_A(t) = (t-3)^2$. Einziger Eigenwert ist $\lambda = 3$. Eigenraum $= \left\{ x \mid \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$. $m_{geo}(\lambda) = 1 \Rightarrow A$ ist nicht trigonalisierbar. Setzte $v_1 := \binom{1}{3}$ und z.B. $v_2 := \binom{0}{1}$

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = (v_1, v_2) \\ T^{-1}AT &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 4.27: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

hat als einzigen Eigenwert λ mit $m_{geo}(\lambda) = 1$, denn

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenraum} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Definition: Die *algebraische Vielfachheit* $m_{alg}(\lambda)$ eines Eigenvektors λ von A ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle von $\varphi_A(t)$

EIGENSCHAFTE:

(a) λ Eigenwert $\Leftrightarrow m_{geo}(\lambda) \geq 1 \Leftrightarrow m_{alg}(\lambda) \geq 1$
(b) $m_{geo}(\lambda) \leq m_{alg}(\lambda)$ und jede Zahl zwischen 1 und $m_{alg}(\lambda)$ kann als $m_{geo}(\lambda)$ auftreten.

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda & & & & \\ & & & \lambda & 1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$m_{geo}(\lambda) = m + 1$, $m_{alg}(\lambda) = m + n$

BEMERKUNG: Eine trigonalisierbare Matrix ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow m_{geo}(\lambda) = m_{alg}(\lambda)$ für jeden Eigenwert λ

Beispiel 4.28:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist $\varphi_A(t) = (2-t)^3$, $m_{alg}(2) = 3$, $m_{geo}(2) = 1$. Es $\exists$ eine trigonalisierbare Matrix T so dass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Setze

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

13. Potenzen

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow D \cdot D \cdots D = D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(T^{-1}AT)^k &= T^{-1}A\underbrace{T\cdot T^{-1}}_{I_n}\cdot A\cdot T\cdot T^{-1}\cdots T^{-1}AT\cdot T^{-1}AT\\
&= T^{-1}\cdot\underbrace{A\cdots A}_{k}\cdot T\\
&= T^{-1}A^kT^k
\end{aligned}$$

Folge

$$\begin{aligned}
A^k &= T\cdot T^{-1}\cdot A\cdot T\cdot T^{-1}\\
&= T\cdot(\underbrace{T^{-1}AT}_{D})\cdot T^{-1}\\
&= TD^kT^{-1}
\end{aligned}$$

Beispiel 4.29:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\
\varphi_A(t) &= \begin{vmatrix}-t & 1\\ 1 & 1-t\end{vmatrix} = -t(1-t)-1\\
&= t^2-t-1\\
\lambda_{1,2} &= \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\\
A-\lambda_1\cdot I_2 &= \begin{pmatrix}-\lambda_i & 1\\ 1 & 1-\lambda_i\end{pmatrix},\quad v_1 = \begin{pmatrix}1\\ \lambda_i\end{pmatrix}\\
T &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\\
\Rightarrow AT &= (Av_1, Av_2)\\
&= (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2)\\
&= \underbrace{(v_1, v_2)}_{T}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}\\
\Rightarrow T^{-1}AT &= T^{-1}/T\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix} = D\\
A^k &= T\cdot D^k\cdot T^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_2 & -1\\ -\lambda_1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \lambda_1^k\cdot\begin{pmatrix}* & *\\ * & *\end{pmatrix}+\lambda_2^k\cdot\begin{pmatrix}* & *\\ * & *\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ANWENDUNG:*Fibonacci-Zahlen* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$. $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$.

$$v_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} \qquad v_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_k$$

$$\Rightarrow v_k = A^k v_0$$

$$\Rightarrow \text{allgemeine Form} x_k = a \cdot \lambda_1^k + b \cdot \lambda_2^k$$

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k 5 \right)$$

Ist

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} a^k & k \cdot b/a \cdot a^k \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$$

$$D = T^{-1}AT \Rightarrow A^k \Rightarrow A^k = a^k \cdot (*) + k \cdot a^{k-1} \cdot (*')$$

$$x_{k+n} = a_{n-1} \cdot x_{k+n-1} + \ldots + a_0 \cdot a_k$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_l & & & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\varphi_A(t) = t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \ldots - a_1 t - a_0$. Sind λ_i die Nullstellen mit $m_{alg}(\lambda_i) = \mu_i$. $\Rightarrow$ allgemeine Lösung

$$x_k = \sum_i \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} b_{ij} k^j \lambda_i^k$$

Beispiel 4.30: $x_{k+2} = 6x_{k+1} - 9x_k$

14. Potenzreihen

№14 8.2.02

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot x^k$ mit $f_k \in \mathbb{C}$. A $m \times n$-Matrix $\rightsquigarrow$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot A^k$$

WANN KONVERGIERT DAS?: Sei (ad hoc):

$$||A|| := n \cdot \max\{|a_{ij}| \, 1 \leq i, j \leq n\}$$

für $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$

$$\begin{aligned} ||AB|| &\leq ||A|| \cdot ||B|| \\ &= n \cdot \max\{ \underbrace{\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right|}_{\leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |b_{jk}|} \quad 1 \leq i, j \leq n\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} ||A|| \frac{1}{n} ||B|| \\ &= \frac{1}{n} ||A|| \cdot ||B|| \end{aligned}$$

FOLGE: $\left|\left|A^k\right|\right| \leq ||A||^k$ falls alle k ≥ 0

FOLGE: Konvergiert $f(x)$ für $|x| < r$, so konvergiert $f(A)$ für $||A|| < r$. Insbesonere: Ist $f(x)$ überall konvergent, so ist $f(A)$ definiert für alle A.

BEHAUPTUNG: T invertierbar $\Rightarrow f(T^{-1}AT) = T^{-1} \cdot f(A) \cdot T$ sofern beide Seiten definiert sind.

Beweis:

$$\begin{aligned}
f(T^{-1}AT) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot (T^{-1}AT) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot T^{-1} \cdot A^k \cdot T \\
&= T^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot A^k \right) \cdot T \\
&= T^{-1} f(A) \cdot T \quad \square
\end{aligned}$$

Beispiel 4.31:

$$\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
\Rightarrow f(D) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot D^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum f_k \lambda_n^k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beispiel 4.32:

$$\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
\Rightarrow f(D) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot \begin{pmatrix} \lambda^k & k \cdot \lambda^{k-1}\mu \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f(\lambda) & f(\lambda)\mu \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot k \cdot \lambda^{k-1}\mu \\
&= f'(\lambda) \cdot \mu
\end{aligned}$$

ÜBUNG: $f(D)$ für

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

KAPITEL 5

Lineare Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \qquad \text{mit } a_{ij} \in \mathbb{C}$$

Anfangsbedingung $x_i(0) = \xi_i \in \mathbb{C}$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Funktion in t mit Vektoren in $\mathbb{C}^n$

$$A = (a_{ij})_{i,j} \qquad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ äquivalent ist

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x$$

mit $x(0) = \xi$. Die allgemeine Lösung lautet:

$$\begin{aligned} x &= e^{At} \cdot \xi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot A^k \cdot \xi \end{aligned}$$

- wohl definiert, da e^x überall konvergiert.
- $x(0) = A^0 \cdot \xi = \xi$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot A^k \cdot \xi \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot t^{k-1}}{k!} \cdot A^k \cdot \xi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot A^{k-1} \cdot \xi \\ &= A \cdot x \quad \square \end{aligned}$$

Sei T invertierbar und $A = TDT^{-1}$, $\Rightarrow e^{At} = T \cdot e^{Dt} \cdot T^{-1}$

Fall (a):

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad e^{Dt} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow x &= e^{At}\xi \\
&= T \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1}\xi \\
&= e^{\lambda_1 t} \cdot b_1 + \cdots + e^{\lambda_n t} \cdot b_n
\end{aligned}
$$

für gewisse $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}^n$, $\Rightarrow$ allgemeine Lösung für A diagonalisierbar mit Eigenvektor $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ hat die obige Form
fehlt einiges
$\Leftrightarrow e^{-At}u = \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow y = \int e^{-At}u(t)dt + C$
Allgemeine Lösung:

$$x = e^{At} \cdot \left(\int e^{-At}u(t)dt + c \right)$$

1. Symmetrische Matrizen

Satz 31: Sei A eine reelle symmetrische Matrix
(1) A ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$
(2) $\mathbb{R}^n$ besitzt eine ONB Eigenvektoren von A
(3) Es gibt eine orthogonale Matrix Q (das heisst $Q^{-1} = Q^T$ so dass $D = Q^T AQ = Q^{-1}AQ$ Diagonalmatrix ist.

Bemerkung: $Q = (b_1, \ldots, b_n)$ mit $b_1, \ldots, b_n$ die ONB von (b).

Bemerkung: Finde zuerst alle EWe und eine Basis jejden Eigenraums, dann wende Orthogonalisierungsverfahren an.
Jede ko reelle Polynom in $x_1, \ldots, x_n$ vom Grad 2 hat die Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \qquad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^T \cdot A \cdot x$$

mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $A = (a_{ij})_{i,j}$ Mit Q wie oben und $x = Qy$ und $D = Q^T AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$
$g(y) = f(y) = (Qy)A \cdot (Qy) = y^T Q^T AQy = y^T Dy$

$$g(y) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Definition: Die b_i heissen die Hauptachsen von A sie sind orthogonal.

Anmerkung: $f(x) = 1 \Leftrightarrow g(y) = 1$ $n = 3 g(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ Ellipsoid. $\lambda_1, \lambda_2 > 0 > \lambda_3$ $\lambda_1 > 0 > \lambda_2, \lambda_3$ $0 > \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ keine Lsg. $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1 + (-\lambda)y_3^2$, $y_1 y_1^2 = 1 + (-\lambda_2)y_2^2 + (-\lambda_3)y_3^2 \geq 1$

ANHANG A

Thema Übungsserie 6, 3.12.2001

Definition: Sei V eine nicht leere Menge mit $+$ und $\cdot$; K ist ein Körper (hier $\mathbb{R}$). V ist ein Vektorraum falls:

(i) $\forall\, u, v, w \in V \quad (u+v)+w = u+(v+w)$
(ii) $\exists\, 0 \in V$ mit $u+0 = 0+u = u$
(iii) $\forall\, u \in V \quad \exists\, v \in V$ mit $u+v=0 \quad (v=-u)$
(iv) $\forall\, u, v \in V \quad u+v = v+u$
(v) $\forall\, k \in K \quad \forall\, u, v \in V \quad k(u+v) = ku+kv$
(vi) $\forall\, a, b \in K \quad \forall\, u \in V \quad (a+b)u = au+bu$
(vii) $\forall\, a, b \in K \quad \forall\, u \in V \quad (a+b)u = a(bu)$
(viii) Für den Einheitsskalar $1 \in K \quad 1 \cdot u = u \quad \forall\, u \in V$

Definition: V Vektorraum, $W \neq \emptyset \quad w \subseteq V$ heisst *Unterraum* von V, falls:

(i) $0 \in W$
(ii) $a, b \in W \Rightarrow a+b \in W$
(iii) $a \in W \quad \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha A \in w$

Behauptung: $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist V.R.

Beweis:

(i) ✓
(ii) $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
(iii) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$
(iv) ...

ANHANG B

Serie 7, 10.12.2001

Definition: V ein Vektorraum über K. $v_1, \ldots, v_n \in V$ heissen linear abhängig, falls skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nicht alle $0 \in K$ existieren, so dass $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$.
Nicht linear abhängig heisst linear unabhängig.

Bemerkung: In $\mathbb{R}^n$ sind höchstens n Vektoren linear unabhängig.

Definition: Rang einer Matrix A ist die Anzahl linear unabhängiger Spalten (Zeilen)

Beispiel 2.1:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & 3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Rang} = 2$$

Definition: Eine *Basis* von V ist eine Menge $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von Vektoren in V mit: jeder Vektor $\mu \in V$ kann *eindeutig* als linear Kombination der Basis geschrieben werden. d.h.

Beispiel 2.2: Im oberen Beispiel lautet die Basis:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig
$v_1, \ldots, v_n$ erzeugen V

Definition: V hat Dimension n, falls V eine Basis von n Elementen besitzt.

Aufgabe 1: Ergänze mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \det = 6$$

Zu Aufgabe 2:

Grad	*Basis*	*Dim*
0	1	1
1	$1, x$	2
2	$1, x, x^2$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

AUFGABE 2A): $\{\underbrace{1}_{v_1}, \underbrace{2x^2}_{v_2}, \underbrace{x^2+2}_{v_3}\}$

$$\underbrace{2}_{\lambda_1} v_1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\lambda_2} v_2 - \underbrace{1}_{\lambda_3} \cdot v_3 = 0$$

$(x^2+2) = \frac{1}{2}(2x^2) + 2 \cdot (1)$

Satz 32: $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ einer dieser Vektoren ist Linearkombination der andern. Nicht linear abhängig

- Nicht linear unabhängig $\Rightarrow$ keine Basis von V.
- x nicht darstellbar $\Rightarrow$ kein erzeugendes System.

AUFGABE 3. FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA: Hier: Ein Polynom hat endlich viele Nullstellen. $a_n x^n + \cdots a_1 x = 0 \Rightarrow$?

$$\frac{x}{x+1} \in U \text{ ?}$$

$$\frac{x}{x+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$$

Koeffizientenvergleich benützen $x = ax + bx^2 + cx^3 \Rightarrow a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = 0$ Und Widerspruch finden.

ZU AUFGABE 2C) & D): Linearkombination $a_0(x-1) + a_1(x-1) + a_2(2x^2) = 0$ und Koeffizientenvergleich

Serie 8, 17.12.2001

Korrektur Aufgabe 1 $p^n(X)q^n(X) \to p^n(0)q^n(0)$

Definition: V ist $\mathbb{R}$-Vektorraum. $(v,w): V \times V \to \mathbb{R}$ heisst Skalarprodukt in V, falls

(i) $(v, \alpha(w_1 + w_2)) = \alpha(v, w_1) + \alpha(v_1, w_2) \qquad \forall\, v, w_1, w_2 \in V \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

(ii) $(v,w) = (w,v) \qquad \forall\, v, w \in V$ (Symmterie)

(iii) $\left.\begin{array}{c} (v,v) \geq 0 \quad \forall\, v \in V \\ (v,v) = 0 \Rightarrow v = 0 \end{array}\right\}$ positiv definiert

Standartskalarprodukt: $V = \mathbb{R}^3 \quad (v,w) = \sum_{i=1}^3 v_i w_i \qquad v, w \in \mathbb{R}^3$ ist Sklalarprodukt

(i) $(v, \alpha(w^1 + w^2)) = \sum_{i=1}^3 v_i \alpha(w_i^1 + w_i^2) =$
$\alpha \sum_{i=1}^3 v_i w_i + \alpha \sum_{i=1}^3 v_i w_i^2 = \alpha(v_1 w_1) + \alpha(v_2 w_2)$

(ii) klar

(iii)
$$\begin{array}{rcl} (v,v) = \sum_{i=1}^3 v_i^2 & \geq & 0 \\ & = & 0 \Leftrightarrow v = 0 \end{array}$$

(a) $V =$ Menge der Polynome vom Grad ≤ 2

(a) kein Skalarprodukt. Betrachtet $P(x) \equiv c \in \mathbb{R}$ $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto c$

(b) Integral ist linear

$$\begin{array}{rcl} \int a(x)b(x)\,dx & = & \int b(x)a(x)\,dx \\ a(x) \geq 0 & \Rightarrow & \int a(x)\,dx \geq 0 \end{array}$$

(c) (i)(ii) ✓ (iii) $p(x) = a + bx + cx^2 \Rightarrow (v,v) = 0 \Rightarrow v = 0$
a konst. $a' = 0$, $(ax)' = a(x')$ $x' = 1$ $(x^2) = 2x$

$$k = 1 \begin{pmatrix} (1,1)_1 & (1,x)_1 & (1,x^2)_1 \\ (x,1)_1 & (x,x)_1 & (x,x^2)_1 \\ (x^2,1)_1 & (x^2,x)_1 & (x^2,x^2)_1 \end{pmatrix}$$

$k = 2$,$k = 3$ Benütze Symmetrie

(b) alksjfdlköasjfkölajsd

2a): **Satz 33:** n Vektoren $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow \det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$

Vektorraum $= \mathbb{R}^2$ Bsp. $(\binom{1}{1})(\binom{1}{0})$ Basis von $\mathbb{R}^2$, weil

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$ d.h linear unabhängig
- $w = (\binom{w_1}{w_2})$ beliebig. $n = \lambda_1(\binom{1}{1}) + \lambda_2(\binom{1}{0}) \Rightarrow w_2 = \lambda_1, w_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 = w_1 - w_2$ d.h erzeugendes System

2b: $S = \{a_1 = (\binom{1}{2}) a_2 = (\binom{3}{5})\}$
$E = \{e_1 = (\binom{1}{0}) e_2 = (\binom{0}{1})\}$

$$\left.\begin{array}{rrr} a_1 = & e_1+ & 2e_2 \\ a_2 = & 3e_1+ & 5e_2 \end{array}\right\} \begin{array}{rrr} e_1 = & -5a_1 & +2a_2 \\ e_2 = & 3a_1 & -a_2 \end{array}$$

$P = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ Übergangsmatrix von Basis S zu Basis E

$(\begin{pmatrix} 4 \\ 7) \end{pmatrix}$ in Basis E $P((\binom{4}{7})) = ((\binom{1}{1}))$ $\qquad 1((\binom{1}{2)}) + 1((\binom{3}{5})) = 8\binom{4}{7})$

ANHANG D

Linear Algebra - Serie 9

Serie 8

AUFGABE 2: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. Allgemein: Es genügt nicht, dass die Vektoren linear unabhängig sind, so dass sie eine Basis bilden.

Serie 9

Definition: $u_1, \ldots, u_n$ Vektoren in $\mathbb{V}$ Vektorraum heissen *orthonormal*, falls $(u_i, u_j) = \delta_y = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Definition: v,w 2 Vektoren. Projektion von v auf w:

$$\mathrm{proj}(v, w) = cw = \frac{(v, w)}{(w, w) \cdot w}$$

1. Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis für $n - dim$ Vektorraum: orthogonal Basis:

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & v_1 \\ w_2 & = & v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{||w_1||^2} w_1 \\ \vdots & & \vdots \\ w_n & = & v_n - \frac{(v_n, w_1)}{||w_1||^2} w_1 - \frac{(v_1, w_2)}{||w_2||^2} - \cdots w_2 - \cdots - \frac{(v_1, w_{n-1})}{||w_{n-1}||^2} - \cdots w_2 \end{array}$$

Für ONB muss man auch normieren.

$$\begin{array}{rcl} z_1 & = & w_1 / \, ||w_1|| \\ z_2 & = & w_2 / \, ||w_2|| \\ \vdots & & \vdots \\ z_n & = & w_n / \, ||w_n|| \end{array}$$

2.THEOREM:

ANHANG E

Serie 12

Definition: Sei S eine n-quadratische Matrix über $\mathbb{R}$. Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ heisst Eigenwert wenn ein Vektor $v \neq 0\,\exists$ so dass $\boxed{Av = \lambda v}$ heiss dann *Eigenvektor*

Definition: Menge der Eigenvektoren zu einem Eigenvektor λ heisst Eigenraum von λ

Definition: Charkteristisches Polynom von $A = \det(A - \lambda 1)$

Definition: Algebraische Vielfachheit von λ = Vielfachheit von λ als Wurzel des charakteristischen Polynom.

Definition: Die geometrische Vielfach = Dimension des Eigenraumes. $A \cdot V \geq q \cdot V$.

$$\begin{aligned} A \cdot v = \lambda v &\Leftrightarrow A \cdot v - \lambda v = 0 \\ &\Leftrightarrow A \cdot v - \lambda 1 v = 0 \\ &\Leftrightarrow (\underbrace{A - \lambda 1}_{Matrix})v = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda 1) = 0 \end{aligned}$$

Beispiel 5.1:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda 1 = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda 1) &= \lambda^3 - 11\lambda^2 + 39\lambda - 45 \stackrel{!}{=} 0 \\ 1? &\quad 1 - 11 + 39 - 45 \neq 0 \\ 3? &\quad 27 - 99 + 117 - 45 = 0 \\ \lambda_1 = 3 &\quad \lambda^3 - 11\lambda^2 + 39\lambda - 45 \\ &\quad \lambda^2 - 8\lambda + 15 \stackrel{!}{=} 0 \\ \lambda_{2,3} &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Das heisst $\det(A - \lambda 1) = (\lambda - 3)^2 \cdot (\lambda - 5) \Rightarrow 3$ hat algebraische Vielfachheit 2.

$Av = \lambda v$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$

$$Av = \begin{pmatrix} 4v_1 & +v_2 & -v_3 \\ 2_v 1 & +5v_2 & -2v_2 \\ v_1 & +v_2 & +2v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \\ 3v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} v_1 & +v_2 & -v_3 & = 0 \\ 2v_1 & +2v_2 & -2v_3 & = 0 \\ v_1 & +v_2 & -v_3 & = 0 \\ & & v_3 & = v_1 + v_2 \end{array}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Basis von Eigenraum$_3$. $\lambda = 5$, $Av = 5v$,

$$\begin{array}{lllll} -v_1 & +v_2 & -v_3 & = 0 & \\ 2v_1 & & -2v_3 & = 0 & \Rightarrow v_1 = v_2 \\ v_1 & +v_2 & -3v_3 & = 0 & \end{array}$$

Definition: A heisst diagonalisierbar, falls $\exists$ Matrix P invertierbar mit $D = P^{-1}AP$ diagonal.

THEOREM: A $n \times n$ Matrix ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A hat n Lösungen unabhängiger Eigenvektor.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \text{ Eigenwert}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Serie 12

(1) (a) ✓
 (b) zu zeigen 3 Eigenvektoren sind linear unabhängig
 (c) siehe Vorlesung

(2) (a) λ Eigenvektor von $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda 1) = 0 \Leftrightarrow \dots$ Benütze $\det A = \det A^T$, $1 = 1^T$
 (b) Vollständige Induktion $\kappa = 1$ ✓. Sei richtig für κ, zu zeigen richtig für $\kappa + 1$. $A^\kappa v = \lambda^\kappa v$
 (c) zu zeigen $\det(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}) = 0$. Benütze $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, $\det(A, B) = \det A \cdot \det B$. Zu zeigen $Av = \lambda v \Rightarrow A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$

(3) (a) zu zeigen $\det(A - (b-a)1) = 0$
 (b) Betrachte $A - (b-a)1$. Rang? Dimension Kern?
 (c) Probiere (schwieriger)

Serie 13, 4.2.2002

1. Aufgabe 1

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. $(A - \lambda \cdot 1) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$. $\det(A-\lambda\cdot 1) = \lambda^2 + 1 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$, das heisst keine Eigenwerte in $\mathbb{R} \Rightarrow$ in $\mathbb{R}$ weder diagonalisierbar noch trigonalisierbar.

$$\lambda = i \qquad\qquad Av = iv$$

$$\left.\begin{array}{r} v_1 - v_2 = iv_1 \\ 2v_1 - v_2 = iv_2 \end{array}\right\} \Rightarrow v_2 = (1-i)v_1 \quad v_1 = \left(\frac{i+1}{2}\right) v_2$$

$$\text{Eigenvektor} v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Gesucht: Q so dass $QTQ^{-1} = A$, $T =$ Rechtsdiagonalmatrix.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{1-i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} i & \frac{2}{1-i} \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$Av = -iv \qquad\qquad \lambda = -i$$

$$\left.\begin{array}{r} v_1 - v_2 = iv_1 \\ 2v_1 - v_2 = iv_2 \end{array}\right\} \Rightarrow v_2 = (1+i)v_1$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}^2$$

diagonalisierbar (da 2 linear unabhängige Eigenvektor.

2. Aufgabe 5

THEOREM: A reelle symmetrische Matrix $\Rightarrow \exists\, P$ orthogonal so dass $P^T AP = D$, D diagonalisierbar, das heisst $P^T = P^{-1}$ **Beispiel 6.1:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Av = 6v$$

Eigenwert $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$

$$\left.\begin{array}{r} 2v_1 - 2v_2 = 6v_1 \\ -2v_1 + 5v_2 = 6v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow v_2 = -2v_1, v_1^2 + v_2^2 = 1$$

Eigenvektor $= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

$Av = v \cdots v_1 = 2v_2, v_1^2 + v_2^2 = 1$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ODER: finde eine Basis von Eigenvektoren, dann Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= 6x_{k+1} + 9x_k \\ v_k &= \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} && Av_k = v_{k+1} \\ v_{k+1} &= \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ 6x_{k+1} - 9x_k \end{pmatrix} \\ &= A \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} && A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. 2b)

$$\begin{aligned} v_k &= Av_{k+1} = A^2 v_{k-2} = \cdots = \\ &= A^k v_0 \end{aligned}$$

(I ♡ ETH)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda 1) &= \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \\ \lambda_{1,2} &= 3 && Av = 3v \\ v_2 &= 3v_1 && 9v_1 + 6v_2 = 3v_2 \\ 3v_2 &= 9v_1 && v_2 = 3v_1 \\ v &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das heisst A nicht diagonalisierbar. In Übung 2

$$\lambda_{1,2} = 1 \qquad \lambda_3 = 2$$

c) ANSATZ:

$$\begin{aligned} x_k &= (a + bx)\lambda_1^k + c\lambda^k \\ x_k &= a + bk + 2^k c \\ &\cdots \end{aligned}$$

ANHANG G

Vorlesungsverzeichnis